Основные формулы комбинаторики.

Задачи, цель которых – определение числа способов осуществление того или иного действия, называются комбинаторными, а наука, изучающая способы решения таких задач называется комбинаторикой.

Выборки без повторений.

Выборки объёма *m* из совокупности *n* различных элементов

Если одна от другой отличается либо составом элементов, либо порядком их расположения

Размещения без повторений объёма *m* из данных *n* элементов.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},\ (n \ge m)$$

Если одно от другого отличаются только порядком расположения элементов

Перестановки без повторений объёма *m*.

$P_m = m!$ (получена из $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, где $n=m$)

Если одно от другого отличаются хотя бы одним элементом (только составом).

Сочетания без повторений объёма *m* из данных *n* элементов.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},\ (n \ge m)$$

Выборки с повторениями.

Выборки объёма *m* из совокупности повторяющихся элементов *n* различных классов

Если одна от другой отличается либо составом элементов, либо порядком их расположения

Размещения с повторениями объёма *m* из повторяющихся элементов *n* различных классов.

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Если одно от другого отличаются только порядком расположения элементов

Перестановки с повторениями, где элемент *i*-го класса (i=1,2,…n) повторяется k_i раз

$$\overline{P}_{k_1;k_2;\ldots k_n} = \frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!},\ k=\Sigma k_i$$

Если одно от другого отличаются хотя бы одним элементом (только составом).

Сочетания с повторениями объёма *m* из повторяющихся элементов *n* различных классов.

$$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

Правило суммы: если объект $x \in X$ может быть выбран n способами, а объект $y \in Y$ может быть выбран m способами, то выбор объекта «либо x, либо y» может быть осуществлён n+m способами.

Правило произведения: если объект $x \in X$ может быть выбран n способами и после каждого из таких выборов объект $y \in Y$ может быть выбран m способами, то выбор объекта «x и y» (упорядоченной пары (x, y)) может быть осуществлён nm способами.

Задание 1. Вычислить, используя формулы комбинаторики для выборок без повторений:

Вычислить	Формула	Расчёт
A_7^3	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, $n \geq m$	$n=7 \geq m=3$ $A_7^3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = \dfrac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = 210$
A_{10}^4	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, $n \geq m$	$n=$____$m=$____ $A_{10}^4 = \dfrac{\ !}{(\ \ -\ \ )!} =$
A_6^6	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, $n \geq m$	$n=$____$m=$____ $A_6^6 = \dfrac{\ !}{(\ \ -\ \ )!} =$
A_5^7	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, $n \geq m$	$n=$____$m=$____ $A_5^7 =$
P_6	$P_m=m!$	$m=6$ $P_6=6!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6=720$
P_4	$P_m=m!$	$m=$__ $P_4=$
C_7^3	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $n \geq m$	$n=7 \geq m=3$ $C_7^3 = \dfrac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = \dfrac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!} = 35$
C_{11}^8	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $n \geq m$	$n=$____$m=$____ $C_{11}^8 =$
C_6^6	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $n \geq m$	$n=$____$m=$____ $C_6^6 =$
C_5^7	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $n \geq m$	$n=$____$m=$____ $C_5^7 =$

Задание 2. Вычислить, используя формулы комбинаторики для выборок с повторениями:

Вычислить	Формула	Расчёт
$\overline{A}_7^3$	$\overline{A}_n^m = n^m$	n=7; m=3 $\overline{A}_7^3 = 7^3 = 343$
$\overline{A}_{10}^4$	$\overline{A}_n^m = n^m$	n=____ m=____ $\overline{A}_{10}^4 =$
$\overline{A}_6^6$	$\overline{A}_n^m = n^m$	n=____ m=____ $\overline{A}_6^6 =$
$\overline{A}_5^7$	$\overline{A}_n^m = n^m$	n=____ m=____ $\overline{A}_5^7 =$
$\overline{P}_{2;1;3}$	$\overline{P}_{k_1;k_2;\ldots k_n} = \frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$, $k=\Sigma k_i$	$k_1=2$; $k_2=1$; $k_3=3$; $k=2+1+3=6$ $\overline{P}_{2;1;3} = \frac{6!}{2!\cdot 1!\cdot 3!} =$ ________
$\overline{P}_{4;2}$	$\overline{P}_{k_1;k_2;\ldots k_n} = \frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$, $k=\Sigma k_i$	k_1=__; k_2=__; k=_______ $\overline{P}_{4;2} = \frac{}{}$
$\overline{C}_7^3$	$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$	n=7; m=3 $\overline{C}_7^3 = \frac{(3+7-1)!}{3!\cdot(7-1)!} = \frac{9!}{3!\cdot 6!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6!} =$
$\overline{C}_{11}^8$	$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$	n=____ m=____ $\overline{C}_{11}^8 = \frac{(8+11-1)!}{8!\cdot(11-1)!} =$
$\overline{C}_6^6$	$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$	n=____ m=____ $\overline{C}_6^6 =$
$\overline{C}_5^7$	$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$	n=____ m=____ $\overline{C}_5^7 =$

Задача 1.

Сколько различных трёхзначных чисел можно составить, при условии, что цифры в числе не повторяются.

Решение:

Данная задача на размещения без повторений объёма *m* из данных *n* элементов (так как один вариант числа от другого может отличаться либо составом элементов____________, либо порядком их расположения ________________).

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, $(n \geq m)$

n=____________________________________*m*=__________________________________

$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} =$

Заметим, что в данное число 720 вариантов вошли те «трёхзначные числа», которые таковыми не являются с точки зрения математики – это, например, числа________________________ («числа с нулём впереди»). Соответственно их нужно пересчитать и исключить из данной совокупности.

I способ расчёта: по классам

Разобьём все числа на десять классов (по виду первой цифры):

«1 класс» - числа с единицей впереди:…………………………………………………...;

«2 класс» - числа с двойкой впереди…………………………………………………..;

«3 класс» - числа с тройкой впереди…………………………………………………..;

«4 класс» - числа с четвёркой впереди: ……………………………………………….;

«5 класс» - числа с пятёркой впереди: ……………………………………………….;

«6 класс» - числа с шестёркой впереди: ……………………………………………;

«7 класс» - числа с семёркой впереди: ………………………………………………..;

«8 класс» - числа с восьмёркой впереди: ..……………………………………………;

«9 класс» - числа с девяткой впереди: ……………………………………………...;

«10 класс» - числа с нулём впереди: ………………………………………………….;

Соответственно, в каждом классе будет одинаковое число элементов:_________________

____

II способ расчёта: комбинаторный

Ответ:__________.

Задача 2.

Сколько различных десятизначных чисел можно составить, при условии, что цифры в числе не повторяются.

Решение:

1. Данная задача очень похожа на предыдущую - на размещения без повторений:

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, $(n \geq m)$

n=____________________________________; *m*=__________________________________

$A \ \ = \frac{\ \ !}{(\ \ - \ \ )!} = \frac{\ \ !}{\ \ !} =$

Заметим, что в данное число вариантов вошли те «десятизначные числа», которые таковыми не являются с точки зрения математики – это, например, числа_________________________ («числа с нулём впереди»). Соответственно их нужно пересчитать и исключить из данной совокупности.

Разобьём все числа также на десять классов. Соответственно, в каждом классе будет одинаковое число элементов:____

____

Ответ:___________.

2. Данная задача всё-таки относится к теме перестановки без повторений объёма m (так как один вариант числа от другого может отличаться только порядком расположения элементов____).

$P_m = m!$,

m=____

Далее аналогично, разобьём все числа также на десять классов. Соответственно, в каждом классе будет одинаковое число элементов:____________________________________

Ответ:___________.

Задача 3.

Сколько слов можно получить при перестановке букв слова «ОТЕЦ».

Решение:

Данная задача относится к теме перестановки без повторений объёма m:

____

Ответ:___________.

Задача 4.

Сколько различных делегаций в составе трёх человек можно выбрать от коллектива, в котором десять человек.

Решение:

Данная задача на сочетания без повторений объёма m из данных n элементов (так как один вариант делегации от другого может отличаться только составом).

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, ($n \geq m$); n=_________________________; m=_________________________;

$$C_{10}^3 = \frac{\quad !}{\quad ! \cdot (\quad - \quad)!} =$$

Ответ:___________.

Задача 5.

Сколько различных трёхзначных номеров можно составить, при условии, что цифры в числе могут повторяться.

Решение:

Данная задача на размещения с повторениями объёма m из повторяющихся элементов n различных классов.

$\overline{A}_n^m = n^m$ ____

Ответ:___________.

Задача 6.

Сколько слов можно получить при перестановке букв слова «ПАПА», «КОЛОКОЛ».

Решение:

Данная задача относится к теме перестановки с повторениями где элемент i-го класса (i=1,2,…n) повторяется k_i раз

$\overline{P}_{k_1;k_2;\ldots k_n}=\dfrac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$, $k=\Sigma k_i$:

- ✓ **«ПАПА»**

k=

k_1=____(**П**); k_2=____(**А**);

$$\overline{P}_{\ldots\ldots}=\frac{\ldots.!}{\ldots..!\ldots..!}$$

- ✓ **«КОЛОКОЛ»**

k=

k_1=____(**К**); k_2=____(**О**); k_3=____(**Л**);

$$\overline{P}_{\ldots\ldots}=\frac{\ldots.!}{\ldots..!\ldots..!\ldots..!}$$

Ответ:__________.

Задача 7.

Сколько различных наборов открыток в количестве 4 штук (6 штук или 8 штук) может приобрести покупатель, если в продаже имеется 6 видов.

Решение:

Данная задача относится к теме сочетания с повторениями m из повторяющихся элементов n различных классов:

$\overline{C}_n^m=\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$:

- ✓ **«4 штуки»**

m=____; n=____;

$$\overline{C}_{\ldots..}^{\ldots..}=\frac{(\ldots..+\ldots..-1)!}{\ldots..!(\ldots..-1)!}=$$

- ✓ **«6 штук»**

m=____; n=____;

$$\overline{C}_{\ldots..}^{\ldots..}=\frac{(\ldots..+\ldots..-1)!}{\ldots..!(\ldots..-1)!}=$$

- ✓ **«8 штук»**

m=____; n=____;

$$\overline{C}_{\ldots..}^{\ldots..}=\frac{(\ldots..+\ldots..-1)!}{\ldots..!(\ldots..-1)!}=$$

Ответ:__________________.

Задача 8.

Сколько автомобилей можно обеспечить номерами, в которых записывается номер региона, три цифры и три буквы.

Решение:

Так как номер содержит две цифры региона **и** три цифры **и** три буквы, то
применимо правило произведения в комбинаторике:
если объект $x \in X$ может быть выбран n способами и после каждого из таких выборов объект $y \in Y$ может быть выбран m способами, то выбор объекта «x и y» (упорядоченной пары (x, y)) может быть осуществлён nm способами.

- **число регионов:**

- **число трёхзначных номеров из цифр** (см задачу №5)**:**

- **число трёхзначных номеров из букв:**

где для номеров машин используются буквы:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й
К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ь	Ы	Ъ	Э	Ю	Я

Задача 1.

Сколько разных двузначных (четырёхзначных) чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, и 4 при условии, что ни одна цифра не повторяется.

Задача 2.

Сколько разных двузначных (четырёхзначных) чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, и 4 при условии, что цифры могут повторяться.

Задача 3.

Сколько разных двузначных (четырёхзначных) чисел можно составить из цифр 3, 2 и 0 при условии, что ни одна цифра не повторяется.

Задача 4.

Сколько разных двузначных (четырёхзначных) чисел можно составить из цифр 3, 2 и 0 при условии, что цифры могут повторяться.

Задача 5.

Сколько разных стартовых пятёрок можно образовать из числа 11 игроков?

Задача 6.

Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «университет»?

Задача 7.

Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «совет»?

Задача 8.

Сколькими способами могут разместиться на скамейке 5 человек.

Задача 9.

Сколько может быть вариантов распределения оценок для четырёх студентов, сдающих экзамен, если известно, что все они экзамен сдали (возможно, некоторые экзамен не сдали, но все были аттестованы и являлись).

Задача 10.

В продаже имеется шоколад пяти видов. Сколькими способами можно купить:

1. **три шоколадки;**
2. **пять шоколадок;**
3. **семь шоколадок.**

Задача 11.

В коллективе 50 человек. Сколькими способами можно избрать правление в составе 4 лиц, если каждое лицо занимает только одну должность.

Задача 12.

В коллективе 50 человек. Сколькими способами можно избрать правление в составе 3 лиц, если каждое лицо может занимать несколько должностей.