Виды случайных событий.

События происходящие в окружающем нас мире, можно разделить на три вида: *достоверные, невозможные и случайные*.

- ***Достоверным*** называется событие, которое обязательно произойдёт при осуществлении испытания.
- ***Невозможным*** называется событие, которое заведомо не произойдёт при осуществлении испытания.
- ***Случайным*** называется событие, которое может произойти либо не произойти при осуществлении испытания.

Задание 1. ***Какие из следующих событий являются достоверными, какие – невозможными, а какие – случайными?:***

События	Вид события
A: – попадание в мишень при одном выстреле	A –
B: – задумано простое и чётное число	B –
C: – выигрыш в лотерее	C –
D: – задумано простое число, оканчивающееся нулём	D –
E: – задумано нечётное число, оканчивающееся единицей	E –
F: – задумано нечётное число, оканчивающееся нулём	F –
G: – закончится весна и наступит лето	G –
H: – закончится весна и наступит зима	H –
I: – бутерброд упадёт маслом вниз	I –
J: – сессия когда-нибудь закончится	J –
K: – занятия по математике будут длиться бесконечно	K –
L: – наугад выбранное трёхзначное число не больше 1000	L –

- События называют ***несовместными***, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление другого.
- События называют ***совместными***, если в одном и том же испытании появление одного из них не исключает появление другого (могут одновременно произойти).

Задание 2. ***Какие из следующих пар событий являются совместными, а какие – несовместными?:***

События	Вид событий
Пусть один раз брошена монета A: – выпал «герб»; B: – выпала «решка»;	A и B –
Пусть из колоды карт выбраны две карты A: – выбрана «пиковая дама»; B: – выбран «крестовый король»;	A и B –
Пусть из колоды карт выбрана одна A: – выбрана «пиковая дама»; B: – выбран «крестовый король»;	A и B –
Пусть стрелок один раз производит выстрел A: – стрелок попал в мишень; B: – стрелок не попал в мишень;	A и B –

Пусть стрелок два раза производит выстрелы A: – стрелок попал в мишень при первом выстреле; B: – стрелок не попал в мишень при втором выстреле;	A и B –
Пусть два стрелка по одному разу производят выстрелы A: – первый стрелок попал в мишень; B: – второй стрелок не попал в мишень;	A и B –
Пусть в семье родился один ребёнок A: – родился мальчик; B: – родилась девочка;	A и B –
Пусть в семье несколько детей A: – старший ребёнок – мальчик; B: – младший ребёнок –девочка;	A и B –
A: – в настоящее время Иванов – президент некоторой страны; B: – в настоящее время Петров – президент этой же страны;	A и B –
A: – идёт снег; B: – идёт дождь;	A и B –

Классическое определение вероятности.

Каждый из возможных результатов испытания назовём **элементарным исходом** (элементарным событием).

Те элементарные исходы, которые интересуют нас, называются **благоприятными событиями**.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов (m) к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов (n), образующих полную группу.

$$p(A)=\frac{m}{n}$$

Свойство 1. Вероятность *достоверного* события равна единице.

Свойство 2. Вероятность *невозможного* события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность *случайного* события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей.

Классическое определение вероятности можно применять лишь в тех случаях, когда число элементарных исходов конечно и элементарные исходы равновероятны.

- Событие A называется ***независимым*** от события B, если вероятность появления события A не зависит от того, произошло событие B или нет.
- Событие A называется ***зависимым*** от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Задание 3. ***Какие из следующих пар событий являются зависимыми, а какие – независимыми?:***

События	Вид событий
A: – идёт снег; B: – идёт дождь;	A и B –
A: – в настоящее время Иванов – король некоторой страны; B: – в настоящее время Петров – король этой же страны;	A и B –

Пусть из колоды карт выбраны две карты *A*: – выбрана «пиковая дама»; *B*: – выбран «крестовый король»;	*A* и *B* –
Пусть стрелок два раза производит выстрелы *A*: – стрелок попал в мишень при первом выстреле; *B*: – стрелок не попал в мишень при втором выстреле;	*A* и *B* –
Пусть два стрелка по одному разу производят выстрелы *A*: – первый стрелок попал в мишень; *B*: – второй стрелок не попал в мишень;	*A* и *B* –
Пусть брошены два игральных кубика *A*: – на первом кубике выпала 3; *B*: – на втором кубике выпала 5;	*A* и *B* –
Пусть в ящике находятся 4 белых и 6 чёрных шаров *A*: – первым выбран белый шар; *B*: – вторым выбран чёрный шар;	*A* и *B* –

Задача.

В партии из *N* деталей имеется *n* стандартных. Наудачу отобраны *m* деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно *k* стандартных.

Решение:

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m деталей из N деталей, то есть C_N^m- числу сочетаний из N элементов по m.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m деталей ровно k стандартных): k стандартных деталей можно взять из n стандартных деталей C_n^kспособами; при этом остальные m-k деталей должны быть нестандартными; взять же m-k нестандартных деталей из N-n нестандартных деталей можно C_{N-n}^{m-k}способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$p = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

Задача 1.

Число сотрудников социального обеспечения 14. Среди них четыре женщины. На конференцию отобраны наугад три человека. Какова вероятность того, что среди отобранных лиц окажется один мужчина?

Решение:

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m=3 человек из N=14, то есть $C_N^m = C_{14}^3$- числу сочетаний из N=14 элементов по m=3.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m=3 человек ровно k=1 мужчин или, что то же самое m-k=3-1=2 женщины): m-k=3-1=2 женщины можно выбрать из n женщин $C_n^{m-k} = C_4^2$ способами; при этом остальные k=1 человек - мужчины; выбрать же k=1 мужчину из N-n=14-4=10 мужчин можно $C_{N-n}^k = C_{10}^1$ способами. Итак, число благоприятствующих исходов равно $C_n^{m-k} C_{N-n}^k = C_4^2 C_{10}^1$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$p=\frac{C_n^{m-k}C_{N-n}^k}{C_N^m}\Rightarrow p=\frac{C_4^2C_{10}^1}{C_{14}^3}=\frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{10!}{1!\cdot 9!}}{\frac{14!}{3!\cdot 11!}}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{10!}{1!\cdot 9!}\cdot\frac{3!\cdot 11!}{14!}=\frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2}\cdot\frac{9!\cdot 10}{9!}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 11!}{11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14}=$$

$$\frac{5\cdot 3}{13\cdot 7}=\frac{15}{91}\Rightarrow p=\frac{15}{91}\approx 0{,}1648$$

Ответ: 0,1648[1].

Статистическое определение вероятности. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось (m), к общему числу фактически произведённых испытаний (n).

$$w(A)=\frac{m}{n}$$

Итак, классическое определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; статистическое определение вероятности - определение относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, классическую вероятность вычисляют до опыта, а статистическую вероятность или относительную частоту – после опыта.

Свойство устойчивости: В различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа (вероятности события).

По статистике частота рождения мальчика – 0,51; а девочки – 0,49; согласно классическому определению вероятности вероятность рождения мальчика равна вероятности рождения девочки – 0,5.

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

События называют **несовместными**, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление другого. События называют **совместными**, если в одном и том же испытании появление одного из них не исключает появление другого (могут одновременно произойти).	$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB)$, где A и B – *совместные*	$p(A+B)=p(A)+p(B)$, где A и B – *несовместные*, то есть $p(AB)=0$
Событие A называется **независимым** от события B, если вероятность появления события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется **зависимым** от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.	$p(AB)=p(A)p_A(B)$, или $p(AB)=p(B)p_B(A)$, где A и B – *зависимые*	$p(AB)=p(A)p(B)$, где A и B - *независимые*, то есть $p_A(B)=p(B)$, $p_B(A)=p(A)$

[1] При вычислении вероятности округляем до четырёх знаков после запятой.

Задача 2.

Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго – 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадёт хотя бы один спортсмен?

Решение:

Обозначим события:

A - в мишень попадёт хотя бы один спортсмен;

A_1 – в мишень попадёт первый спортсмен;

A_2 – в мишень попадёт второй спортсмен.

Очевидно, что $A=A_1+A_2$ и события A_1 и A_2 – совместные.

$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=0{,}85+0{,}8-0{,}85\cdot 0{,}8=0{,}97$.

Ответ: 0,97.

Задача 3.

В коробке 10 шаров, из которых 4 белых, а остальные – чёрные. Наудачу выбираем три шара. Какова вероятность того, что среди выбранных, хотя бы один белый.

Решение:

Обозначим события:

A - из трёх, выбранных шаров хотя бы один белый;

A_1 – из трёх, выбранных шаров ровно один белый;

A_2 – из трёх, выбранных шаров ровно два белых;

A_3 – из трёх, выбранных шаров ровно три белых.

События A_1, A_2 и A_3 – несовместны, поэтому $P(A)=\mathrm{P}(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$.

Используя формулу $p=\dfrac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$, находим при $N=10$, $n=4$, $m=3$, $k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=3$

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}+\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}+\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=0{,}5+0{,}3+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

Ответ: 5/6.

Задача 4.

Игральный кубик подбрасывается три раза. Какова вероятность того, что 6 выпадет ровно два раза.

Решение:

Обозначим события:

A – 6 выпадет ровно два раза;

A_1 – 6 выпадет первый раз;

A_2 – 6 выпадет второй раз;

A_3 – 6 выпадет третий раз, соответственно противоположные им события:

$\bar{A}_1$ – 6 не выпадет первый раз;

$\bar{A}_2$ – 6 не выпадет второй раз;

$\bar{A}_3$ – 6 не выпадет третий раз.

Очевидно, что $A=A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$. Тогда по теореме сложения вероятностей совместных $A_1A_2\bar{A}_3$; $A_1\bar{A}_2A_3$; $\bar{A}_1A_2A_3$ событий и по теореме произведения вероятностей независимых A_1; A_2; A_3; $\bar{A}_1$; $\bar{A}_2$; $\bar{A}_3$ событий имеем:

$$p(A)=p(A_1)p(A_2)p(\overline{A_3})+p(A_1)p(\overline{A_2})p(A_3)+p(\overline{A_1})p(A_2)p(A_3)=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{72}$$

Ответ: 5/72.

Полная группа событий.

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Задание 4. ***Какие из следующих событий образуют полную группу?:***

События	Вид группы
Пусть брошена одна монета A_1: – выпал «герб»; A_2: – выпала «решка»;	!
Пусть брошена одна монета A_1: – выпал «герб»; A_2: – выпала «решка»; A_3: – монета встала на ребро; A_4: – монета зависла в воздухе;	
Пусть брошены две монеты A_1: – на первой монете выпал «герб»; A_2: – на второй монете выпала «решка»;	
Пусть брошены две монеты A_1: – на первой монете выпал «герб», на второй – «решка»; A_2: – на первой монете выпал «герб», на второй – «герб»; A_3: – на первой монете выпала «решка», на второй – «решка»; A_4: – на первой монете выпала «решка», на второй – «герб»;	
Брошен игральный кубик A_1: – выпала «1»; A_2: – не выпала «1»;	
Брошен игральный кубик A_1: – выпала «1»; A_2: – выпала «2»; A_3: – выпала «3»; A_4: – выпала «4»; A_5: – выпала «5»; A_6: – выпала «6».	
A_1: – Иванов сдал экзамен на отлично; A_2: – Иванов сдал экзамен на хорошо; A_3: – Иванов сдал экзамен на удовлетворительно; A_3: – Иванов сдал экзамен на неудовлетворительно;	
A_1: – Иванов сдал экзамен на отлично; A_2: – Иванов не сдал экзамен;	
A_1: – Иванов сдал экзамен; A_2: – Иванов не сдал экзамен;	
A_1: – наступило утро; A_2: – наступил день; A_3: – наступил вечер; A_3: – наступила ночь;	
A_1: – наступило утро; A_2: – наступил сентябрь;	

Противоположные события.

Два единственно возможных события, образующих полную группу, называются *противоположными*. Если событие обозначено через A, то противоположное ему событие обозначается через $\bar{A}$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Задание 5. Какие из следующих пар событий являются противоположными? Если события не противоположные, то напишите противоположные события:

События	Вид событий	Противоположные события
Пусть брошена одна монета A_1: – выпал «герб»; A_2: – выпала «решка»;		
Пусть брошена одна монета A_1: – выпал «герб»; A_2: – не выпал «герб»;		
A_1: – идёт снег; A_2: – идёт дождь;		
Брошен игральный кубик A_1: – выпала «1»; A_2: – выпала «6»;		
A_1: – Иванов сдал экзамен на отлично; A_2: – Иванов сдал экзамен на хорошо;		

Формула полной вероятности.

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, B_3, $\ldots B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

$$\text{где}\quad P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=1$$

или

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

$$\text{где}\quad \sum_{i=1}^{n}P(B_i)=1$$

Формула Байеса.

Пусть событие A, может наступить лишь при условии появлении одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, B_3, $\ldots B_n$, образующих полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса:

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)},\quad i=1,2,\ldots,n$$

$$\text{где}\quad P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

$$\text{и}\quad P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=1$$

Задача 5.

В магазин поступает минеральная вода в бутылках от двух изготовителей: местного и иногороднего, причём местный изготовитель поставляет 40% всей продукции. Вероятность того, что при транспортировке бутылка окажется разбитой, для местной продукции – 0,5%, а для иногородней продукции – 2%. Найдите вероятность того, что взятая наудачу бутылка окажется неразбитой. Какова ожидаемая доля разбитых бутылок? Найти вероятность того, что взятая разбитая бутылка иногороднего изготовителя.

Решение:

Пусть события означают:

A – «взятая наудачу бутылка окажется неразбитой»;

$\bar{A}$ – «взятая наудачу бутылка окажется разбитой».

Пусть гипотезы B_1 и B_2 означают соответственно, что минеральная вода в бутылке местного изготовителя и иногороднего изготовителя. Согласно условию задачи:

$p(B_1)=0,4$;

$p(B_2)=0,6$ - местный изготовитель поставляет 40% всей продукции, следовательно иногородний 60%.

$p(\bar{A}/B_1)=0,005$;

$p(\bar{A}/B_2)=0,02$ – условные вероятности события $\bar{A}$, при условии, что событие B_1 (B_2) произошло - вероятности того, что при транспортировке бутылка окажется разбитой, для местной продукции (иногородней) продукции.

Тогда по теореме о сумме вероятностей противоположных событий: $p(A/B_i)+p(\bar{A}/B_i)=1$ находим:

$p(A/B_1)=1-p(\bar{A}/B_1)=1-0,005=0,995$;

$p(A/B_2)=1-\mathrm{p}(\bar{A}/B_2)=1-0,02=0,98$ – условные вероятности события A, при условии, что событие B_1 (B_2) произошло - вероятности того, что при транспортировке бутылка окажется неразбитой, для местной продукции (иногородней) продукции.

Для вычисления искомой вероятности применим формулу полной вероятности:

$p(A)=p(A/B_1)\cdot p(B_1)+p(A/B_2)\cdot p(B_2)=0,995\cdot 0,4+0,98\cdot 0,6=0,986$

$p(A)=0,986$ - искомая вероятность того, что взятая наудачу бутылка окажется неразбитой (или 98,6% неразбитых бутылок).

$p(\bar{A})=1-0,986=0,014$

$p(\bar{A})=0,014$ - искомая вероятность того, что взятая наудачу бутылка окажется разбитой (или 1,4% разбитых бутылок).

Для вычисления вероятности того, что взятая разбитая бутылка иногороднего изготовителя применим формулу Байеса:

$$P\left(B_2/\overline{A}\right)=\frac{P(B_2)\cdot P\left(\overline{A}/B_2\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{0,012}{0,014}=\frac{6}{7}\approx 0,857$$

$p(B_2/\bar{A})=0,857$ – искомая вероятность того, что взятая разбитая бутылка иногороднего изготовителя.

Задача 6.

В магазин поступают телевизоры трёх фирм: Samsung, LG и Sony, причём половину всей продукции составляют телевизоры всей продукции Sony, а треть - LG. Известно, что брак при производстве телевизоров фирмы Samsung составляет в среднем – 9%, фирмы LG – 3%, а фирмы Sony – 1%. Найдите вероятность того, что купленный телевизор бракован. Какова вероятность, что бракованный телевизор - Sony.

Решение:

Пусть события означают:

A – телевизор бракован;

$\bar{A}$ – телевизор не бракован.

Пусть гипотезы B_1, B_2 и B_3 означают соответственно, что телевизор марки Samsung, LG и Sony соответственно. Согласно условию задачи:

$p(B_1)$=____;

$p(B_2)$=____;

$p(B_3)$=____;

(контроль: $p(B_1)+p(B_2)+p(B_3)=1$ ______________________________)

Запишем условные вероятности:

$p_{B_1}(A)$=____;

$p_{B_2}(A)$=____;

$p_{B_3}(A)$=____;

Вычислим вероятность того, что купленный телевизор бракован по формуле полной вероятности:

$p(A)$=____;

По формулам Байеса вычислим следующие вероятности:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$