Классическое определение вероятности.

Каждый из возможных результатов испытания назовём **элементарным исходом** (элементарным событием).

Те элементарные исходы, которые интересуют нас, называются **благоприятными событиями**.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов (M) к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов (N), образующих полную группу.

$$p(A)=\frac{M}{N}$$

Свойство 1. Вероятность *достоверного* события равна единице.

Свойство 2. Вероятность *невозможного* события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность *случайного* события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей.

Классическое определение вероятности можно применять лишь в тех случаях, когда число элементарных исходов конечно и элементарные исходы равновероятны.

Задача 1.

Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется:

случайно названное двузначное число

случайно названное двузначное число, цифры которого различны

Задача.

В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

Решение:

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m деталей из N деталей, то есть C_N^m – числу сочетаний из N элементов по m.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m деталей ровно k стандартных): k стандартных деталей можно взять из n стандартных деталей C_n^k способами; при этом остальные m-k деталей должны быть нестандартными; взять же m-k нестандартных деталей из N-n нестандартных деталей можно C_{N-n}^{m-k} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$\boxed{p = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}}$$

Задача 2.

Число сотрудников социального обеспечения 14. Среди них четыре женщины. На конференцию отобраны наугад три человека. Какова вероятность того, что среди отобранных лиц окажется один мужчина?

Решение:

N=14 – число сотрудников в коллективе; n=4 – число **женщин** в коллективе; m=3 – число человек на конференцию; k=2 – число **женщин** на конференцию **! *n* и *k* должны быть согласованы**.	N=14 – число сотрудников в коллективе; n=10 – число **мужчин** в коллективе; m=3 – число человек на конференцию; k=1 – число **мужчин** на конференцию **! *n* и *k* должны быть согласованы**.
$p = \frac{C_4^2 \cdot C_{10}^1}{C_{14}^3}$	$p = \frac{C_{10}^1 \cdot C_4^2}{C_{14}^3}$

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m=3 человек из N=14, то есть $C_N^m = C_{14}^3$– числу сочетаний из N=14 элементов по m=3.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m=3 человек ровно k=1 мужчин или, что то же самое m-k=3-1=2 женщины): m-k=3-1=2 женщины можно выбрать из n женщин $C_n^{m-k} = C_4^2$ способами; при этом остальные k=1 человек - мужчины; выбрать же k=1 мужчину из N-n=14-4=10 мужчин можно $C_{N-n}^k = C_{10}^1$ способами. Итак, число благоприятствующих исходов равно $C_n^{m-k} C_{N-n}^k = C_4^2 C_{10}^1$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$p=\frac{C_n^{m-k}C_{N-n}^{k}}{C_N^m}\Rightarrow p=\frac{C_4^2C_{10}^1}{C_{14}^3}=\frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{10!}{1!\cdot 9!}}{\frac{14!}{3!\cdot 11!}}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{10!}{1!\cdot 9!}\cdot\frac{3!\cdot 11!}{14!}=\frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2}\cdot\frac{9!\cdot 10}{9!}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 11!}{11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14}=$$

$$\frac{5\cdot 3}{13\cdot 7}=\frac{15}{91}\Rightarrow p=\frac{15}{91}\approx 0{,}1648$$

Ответ: 0,1648.

Задача 3.

Имеются 25 единиц товара в одинаковых упаковках. Известно, что в 20 из них товар высшего сорта – в остальных товар первого сорта. Случайным образом отбирают 6 единиц товара. Вычислить вероятность того, что среди них:

а) все с товаром первого сорта;
б) половина с товаром первого сорта;
в) менее половины упаковок с товаром первого сорта.

Задача 4.

Как приближённо установить число рыб в озере?

Забрасываем сеть в озеро и, допустим, находим в ней *n* рыб. Каждую из них метим и выпускаем обратно. Через несколько дней, в такую же погоду и в том же месте опять забрасываем ту же сеть и, допустим, находим в ней *m* рыб, среди которых *k* меченых. Сколько рыб в озере?

Задача 5.

Первенство по баскетболу оспаривают 18 лучших команд, которые путём жеребьёвки распределяются на две группы по 9 команд в каждой; 5 команд обычно занимают первые места. Какова вероятность попадания:

- **всех лидирующих команд в одну группу;**
- **двух лидирующих команд в одну группу и трёх в другую?**

Наличие лидирующих команд в обеих группах_______________________________________,
чем их отсутствие в одной группе. Слабых групп нет.

Статистическое определение вероятности.
Относительная частота. Устойчивость относительной частоты.

Относительной частотой (частостью) события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось (m), к общему числу фактически произведённых испытаний (n).

$$\tilde{p}(A) = w(A) = \frac{m}{n}$$

где $\tilde{p}(A)$ - статистическая вероятность;

$w(A)$- относительная частота (частость).

Итак, классическое определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; статистическое определение вероятности - определение относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, классическую вероятность вычисляют до опыта, а статистическую вероятность или относительную частоту – после опыта.

Свойство устойчивости: В различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа (вероятности события).

По статистике частота рождения мальчика – 0,51; а девочки – 0,49; согласно классическому определению вероятности вероятность рождения мальчика равна вероятности рождения девочки – 0,5.

Задача 6.

Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 80 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

Задача 7.

По цели произведено 25 выстрелов, причём зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

Задача 8.

При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

Задача 9.

Относительная частота непопаданий в цель оказалась 0,4. Найти число выстрелов, если число попаданий оказалось равным 15.

Геометрическое определение вероятности.

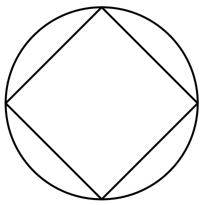
Пусть плоская фигура g (отрезок или тело) составляет часть плоской фигуры G (отрезка или тела). На фигуру G наудачу брошена точка. Это означает выполнение следующих предположений: брошенная точка может оказаться в любой точке фигуры G, вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры (длине отрезка или объёму) и не зависит ни от её расположения относительно G, ни от формы g, тогда вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством:

$$p = \frac{S_g}{S_G}\left(p = \frac{l_g}{l_G}; \quad p = \frac{V_g}{V_G}\right)$$

Одномерное пространство (отрезок)	Двумерное пространство (фигура)	Трёхмерное пространство (тело)
длина	площадь	объём
$p = \frac{l_g}{l_G}$	$p = \frac{S_g}{S_G}$	$p = \frac{V_g}{V_G}$

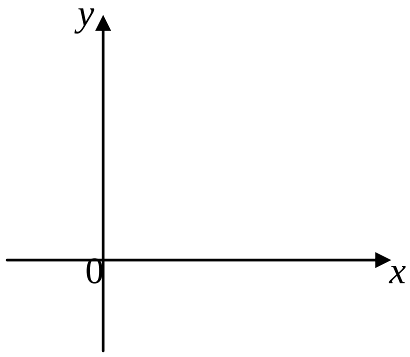
Задача 10.

В круг вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность, что точка попадёт в квадрат?



Задача 11.

8В квадрат с вершинами в точках O(0; 0), K(0; 1), L(1; 1), M(1; 0) наудачу бросается точка $Q(x; y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y>0,5x$.



Задача 12.

Точка брошена в область ограниченную $x^2+4y^2=8$. Найти вероятность того, что она попадёт в область ограниченную $x^2+4y^2=8$ и $x^2-4y=0$. (ответ $\frac{\pi + 2/3}{4\pi}$)

$x^2+4y^2=8$

$x^2-4y=0$

Задача 13.

Два лица A и B условились встретиться в определённом месте, договорившись только о том, что каждый является туда в определённый момент времени между 11 ч и 12 ч и ждёт в течение 30 мин. Если партнёр к этому времени ещё не пришёл или уже успел покинуть установленное место, то встреча не состоится. Найти вероятность того, что встреча состоится.

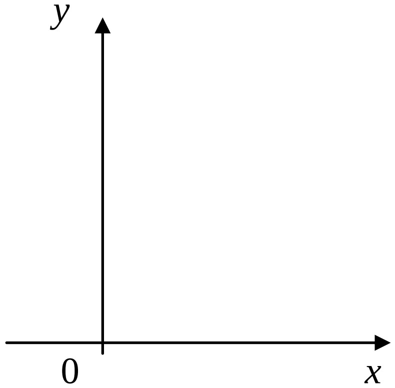
Решение:

Обозначим моменты прихода в определённое место лиц A и B соответственно через x и y. В прямоугольной системе координат Oxy возьмём за начало отсчёта 11 ч, а за единицу измерения 1 ч. По условию задачи:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащие квадрату $OABC$ со стороной, равной 1.

Событие C – встреча двух лиц произойдёт, если разность между x и y не превзойдёт 0,5 ч (по абсолютной величине), то есть $|y - x| \le 0{,}5$



$$p = \frac{S_g}{S_G} = \frac{1-2S}{S} = \frac{1 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(0{,}5)^2}{1^2} = 0{,}75$$

Задача 14.

Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придётся ожидать освобождение причала, если время стоянки первого парохода равно одному часу, а второго – двум часам. (ответ 0,1207)

Полная группа событий.

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Задание 1. Какие из следующих событий образуют полную группу?:

События	Вид группы
Пусть брошена одна монета A_1: – выпал «герб»; A_2: – выпала «решка»;	!
Пусть брошена одна монета A_1: – выпал «герб»; A_2: – выпала «решка»; A_3: – монета встала на ребро; A_4: – монета зависла в воздухе;	
Пусть брошены две монеты A_1: – на первой монете выпал «герб»; A_2: – на второй монете выпала «решка»;	
Пусть брошены две монеты A_1: – на первой монете выпал «герб», на второй – «решка»; A_2: – на первой монете выпал «герб», на второй – «герб»; A_3: – на первой монете выпала «решка», на второй – «решка»; A_4: – на первой монете выпала «решка», на второй – «герб»;	
Брошен игральный кубик A_1: – выпала «1»; A_2: – не выпала «1»;	
Брошен игральный кубик A_1: – выпала «1»; A_2: – выпала «2»; A_3: – выпала «3»; A_4: – выпала «4»; A_5: – выпала «5»; A_6: – выпала «6».	
A_1: – Иванов сдал экзамен на отлично; A_2: – Иванов сдал экзамен на хорошо; A_3: – Иванов сдал экзамен на удовлетворительно; A_3: – Иванов сдал экзамен на неудовлетворительно;	
A_1: – Иванов сдал экзамен на отлично; A_2: – Иванов не сдал экзамен;	
A_1: – Иванов сдал экзамен; A_2: – Иванов не сдал экзамен;	
A_1: – наступило утро; A_2: – наступил день; A_3: – наступил вечер; A_3: – наступила ночь;	
A_1: – наступило утро; A_2: – наступил сентябрь;	

Задача 1*.

Сколько существует различных 5-значных чисел, записываемых цифрами из множества {2, 3, 4, 5, 6} и таких, что чётные цифры чередуются с нечётными?

Задача 2*.

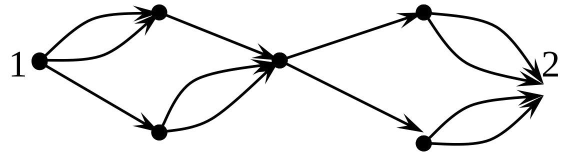
Сколько существует различных 6-значных чисел, записываемых цифрами из множества {4, 5, 6, 7, 8} и таких, что чётные цифры чередуются с нечётными?

Задача 3.

Сколько различных 5-значных нечётных и сколько чётных чисел можно составить из цифр числа 87654?

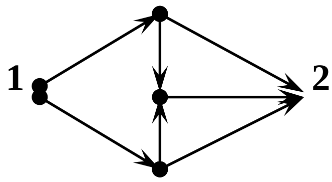
Задача 4.

Сколько различных элементарных путей [1, 2]?



Задача 5.

Сколько различных элементарных путей, связывающих вершины 1 и 2?



Задача 6.

Вычислить число A_3^4 **и** $\overline{A}_3^4$**.**

Задача 7.

Вычислить число C_3^4 **и** $\overline{C}_3^4$**.**

Задача 8.

Среди 200 лотерейных билетов есть 8 выигрышных. Найти вероятность того, что из купленных 5 билетов:

1. **2 билета выигрышные;**
2. **все билеты выигрышные;**
3. **все билеты проигрышные.**

Задача 9.

Определите, какие из следующих событий являются: достоверными, невозможными, случайными.

1. **выпадение трёх очков при бросании игральной кости;**
2. **извлечение бубнового короля из полной колоды карт;**
3. **наудачу выбранное простое число делится на единицу;**
4. **наудачу выбранное натуральное число кратно двум;**
5. **к случайно выбранной кости из набора домино можно приставить ровно 6 других.**
6. **наудачу выбранное натуральное число больше нуля;**
7. **выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости;**
8. **четыре попадания при трёх выстрелах;**
9. **выплата рубля шестью монетами;**
10. **появление 15 очков при бросании 3 игральных костей.**

Задача 10.

В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадёт в данный треугольник.

Задача 11.

В прямоугольник с вершинами *K*(-2, 0), *L*(-2, 5), *M*(1, 5), *N*(1, 0) брошена точка. Какова вероятность того, что её координаты (*x*, *y*) будут удовлетворять неравенствам: $x^2+1 \le y \le 3-x$?

Задача 12.

В шар вписана правильная треугольная пирамида. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность попадания точки в пирамиду.