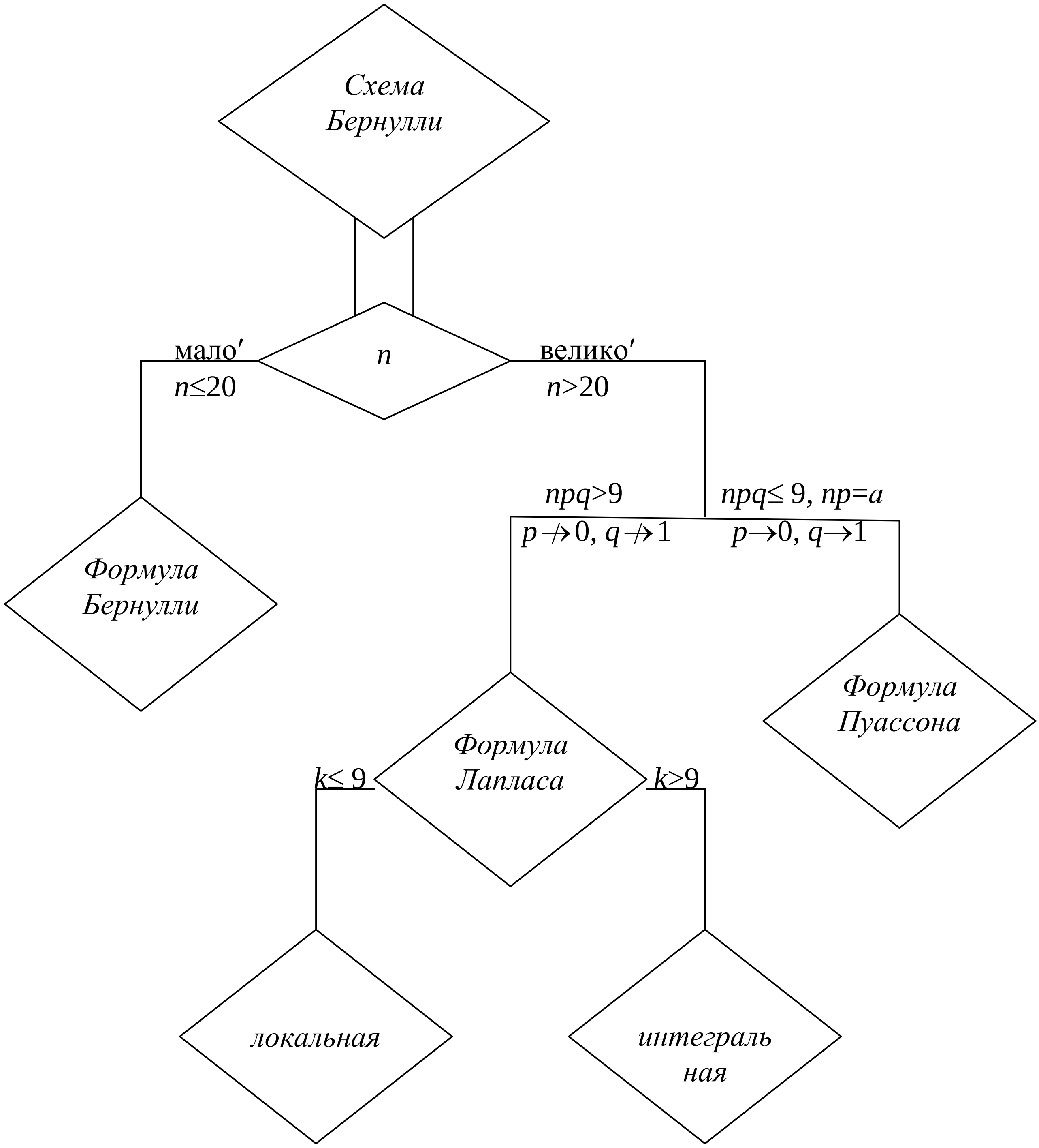
Повторные независимые испытания.

Если производится несколько испытаний, причём вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A*.

Будем рассматривать такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Схема Бернулли: проводится n повторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом, причём вероятность появления в каждом испытании постоянна и равна p.



Формула Бернулли.

Если выполняется схема Бернулли и n – мало, а вероятности p и q (p+q=1) отличны от нуля и единицы, то для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{или} \quad P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

Задача

Вероятность того, что лампа останется неисправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что из пяти ламп не менее трёх останутся исправными после 1000 часов работы.

Решение

Итак, p=0,8 и q=0,2 – соответственно вероятности противоположных событий, что лампа останется исправной и неисправной после 1000 часов работы (p+q=0,8+0,2=1).

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится n=5 повторных независимых испытаний (проверяется на исправность пять ламп); с двумя исходами в каждом (после 1000 часов работы лампа останется исправной или неисправной); вероятность p=0,8 – исправности лампы после 1000 часов работы в каждом испытании постоянна.

Так как число независимых испытаний мало (n=5), а вероятности p=0,8 – отлична от 0 и q=0,2 – отлична от 1 и число благоприятствующих условию исходов мало (того, что из пяти ламп не менее трёх останутся исправными после 1000 часов работы), их три (k≥3 ⇒ k=3; 4; 5), то для вычисления заданной вероятности применим формулу Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^n q^{n-k}$

$$P_{n=5}(k\ge 3)=P_{n=5}(k=3)+P_{n=5}(k=4)+P_{n=5}(k=5)=$$

$$=C_5^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^{5-3}+C_5^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^{5-4}+C_5^5\cdot 0{,}8^5\cdot 0{,}2^{5-5}=$$

$$=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2+\frac{5!}{4!\cdot(5-4)!}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^1+\frac{5!}{5!\cdot(5-5)!}\cdot 0{,}8^5\cdot 0{,}2^0=$$

$$=10\cdot 0{,}512\cdot 0{,}04+5\cdot 0{,}4096\cdot 0{,}2+0{,}32768=0{,}94208$$

Ответ: 0,94208.

Задача

Что вероятнее выиграть у равносильного противника в шахматы две партии из четырёх или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится n=4 (или 6) повторных независимых испытаний (____); с двумя исходами в каждом (______________________________); вероятность p=_____ – ______________________________ в каждом испытании постоянна.

две партии из четырёх	**три партии из шести**
Так как число независимых испытаний мало (n=4), а вероятность p=0,5 и q=1-p=1-0,5=0,5 – отличны от 0 и 1, применим формулу Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $P_{n=4}(k=2)=\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5^{4-2}=$	Так как число независимых испытаний мало (n=__), а вероятность p=___ и q=1-p=_______ – __________ 0 и 1, применим формулу ___________:

Локальная теорема Лапласа.

Если выполняется схема Бернулли и n – достаточно велико, а вероятности p и q ($p+q=1$) отличны от нуля и единицы и $npq>9$, то для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз применим локальную формулу Лапласа (она тем точнее, чем больше n):

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\quad где\quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}};\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Очевидно, что погрешность формулы при больших n мала. В литературе встречаются различные варианты описаний границ применимости этой формулы:
а) при $npq>9$;
б) $n>100$, $npq>20$ (и другие).
Однако все исследователи сходятся к тому, что наиболее хорошие результаты при $p=q=0,5$.

Задача

Известно, что в данном технологическом процессе 10% изделий имеют дефект. Какова вероятность того, что в партии из 400 изделий не будут иметь дефекта 378 изделий?

Решение:

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится $n=400$ повторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом (изделие с дефектом или изделие без дефекта). Вероятность события, что изделие не будет иметь дефекта в каждом испытании постоянна и равна $p=0,9$. Так как число независимых испытаний велико ($n=400$), а вероятности $p=0,9$ – отлична от 0 и $q=0,1$ – отлична от 1, то для вычисления заданной вероятности применим локальную формулу Лапласа: $P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

В задаче $n=400$; $p=0,9$; $q=1-p=1-0,9=0,1$; $k=378$.

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{378-400\cdot 0,9}{\sqrt{400\cdot 0,9\cdot 0,1}}=\frac{18}{6}=3$$

$\varphi(3)=0,0044$ (можно рассчитать, можно воспользоваться таблицей приложения)

$$P_{400}(378)\approx\frac{1}{6}\cdot 0,0044\approx 0,0007$$

Задача

На выборах в регионе явка избирателей составила 64%. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных лиц, имеющих право голосования, принявших участие в выборах, окажется 275 человек.

Решение:

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*:____

____

____

____

применим локальную формулу Лапласа: n=____; p=_____; $q=1-p$=_________; k=______.

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=$$

$$\varphi(\qquad)=$$

$$P\ (\qquad)=$$

Формула Пуассона.

Если выполняется схема Бернулли и n – достаточно велико, а вероятности p и q ($p+q=1$) близки к нулю и единице, при этих условиях $np=a$ – некоторое небольшое число, а $npq\leq 9$, то для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз применим формулу Пуассона:

$$P_n(k)\approx\frac{a^k e^{-a}}{k!}\quad \text{где}\quad a=np$$

Формула Пуассона применяется в тех случаях, когда $npq\leq 9$.

Задача

Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут:

а) 2 негодных изделия;
б) не более 2-х негодных изделий;
в) более 2-х негодных изделий.

Решение:

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится n=______ повторных независимых испытаний (____); с двумя исходами в каждом (__________________________________); вероятность того, что ____________________________, в каждом испытании постоянна и равна p=___________.

Итак, схема Бернулли выполняется и n=______ – достаточно __________, а вероятности p=___________ и q=___________ ($p+q=1$), при этих условиях np=____________=a – некоторое небольшое число и формула Пуассона применяется в тех случаях, когда npq=_____________________.

- Итак, для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях ровно $k=2$ раза применим формулу Пуассона:

$$P_n(k)\approx\frac{a^k e^{-a}}{k!}\quad \text{где}\quad a=np.$$

$$a=np$$

$$P_{5000}(2)\qquad\qquad\approx 0{,}1839$$

- Итак, для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях не более, чем $k=2$ раза также применим формулу Пуассона:

$$P_{5000}(k\leq 2)=\qquad\qquad\approx 0{,}9197$$

- Итак, для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях более, чем $k=2$ раза воспользуемся теоремой о сумме вероятностей противоположных событий:

$$P_{5000}(k>2)+P_{5000}(k\leq 2)=1$$

$$P_{5000}(k>2)=1-P_{5000}(k\leq 2)$$

$$P_{5000}(k>2)=$$

Ответ: 0,1839; 0,9197; 0,0803.

Интегральная теорема Лапласа.

Если выполняется схема Бернулли и n – достаточно велико, а вероятности p и q ($p+q=1$) отличны от нуля и единицы и $npq>9$, то для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (от k_1 до k_2), при этом их достаточно велико) применим интегральную формулу Лапласа:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad где \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

или

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad где \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Итак, таблицы для $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ приведены в учебнике, причём данная функция нечётная, то есть $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, и для всех $|x|>5$ $\Phi(x)=0,5$.
Формулу имеет смысл применять при $npq>9$.

<u>Замечание:</u> интегральная теорема Лапласа применяется для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (от k_1 до k_2 – оба этих значения включаются в исследуемый интервал, то есть неравенство нестрогое $[k_1; k_2]$). Для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях более k_1 и менее k_2 раз (от k_1 до k_2 – но теперь оба этих значения не включаются в исследуемый интервал, то есть неравенство строгое $(k_1; k_2)$) следует взять значения от k_1+1 до k_2-1 раз.
<u>Замечание:</u> если число раз от k_1 до k_2 невелико (менее 9), то для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз можно применить формулу Бернулли, Лапласа или Пуассона в зависимости от условий для каждого такого k_i (от k_1 до k_2) и результаты сложить как сумму вероятностей несовместных событий.

Задача

Оптовая база снабжает товаром 625 магазинов. Вероятность того, что в течение дня поступит заявка на товар равна 0,8 для каждого магазина. Найдите вероятность того, что в течение дня поступит не менее 480 и не более 500 заявок.

Решение:

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится n=______ повторных независимых испытаний (____); с двумя исходами в каждом (______________________); вероятность события, что ________________________________ в каждом испытании постоянна и равна $p=0,8$.
Для решения задачи воспользуемся интегральной теоремой Лапласа, так как ______________
____
по условию задачи, $n=625$; $p=0,8$; $q=1-p=1-0,8=0,2$; $k_1=480$ $k_2=500$.

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{480 - 625 \cdot 0,8}{\sqrt{625 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} =$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - 625 \cdot 0,8}{\sqrt{625 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} =$$

$$P_{625}(480; \quad 500) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = 0,4772$$

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях.

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства: $np-q \le k_0 \le np+p$. Причём:

- если число $np-q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;
- если число $np-q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно k_0 и k_0+1;
- если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0=np$.

Задача

По известной статистике 1960-ых на 10 девочек приходится 9 мальчиков. Найти наиболее вероятное число девушек среди ста школьных выпускников 1980-го года и соответствующую этому событию вероятность.

Решение:

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства: $np-q \le k_0 \le np+p$. По условию задачи: $p=\frac{m}{n}=\frac{10}{10+9}=\frac{10}{19};\quad q=1-p=1-\frac{10}{19}=\frac{9}{19}$

$$100\cdot\frac{10}{19}-\frac{9}{19}\le k_0 \le 100\cdot\frac{10}{19}+\frac{10}{19}$$

$$52{,}2\le k_0 \le 53{,}2$$

Но так как число девушек выражается целым значением, то наиболее вероятное число девушек среди ста школьных выпускников 1980-го года – ____ девушки.

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $\varphi(-x)=\varphi(x)$ - чётная, $\varphi(x\geq 4)=0$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ **и** $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ - нечётная, $\Phi(x\ge 5)=0{,}5$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,499952	0,499954	0,499956	0,499958	0,499959	0,499961	0,499963	0,499964	0,499966	0,499967
4,0	0,499968	0,499970	0,499971	0,499972	0,499973	0,499974	0,499975	0,499976	0,499977	0,499978
4,1	0,499979	0,499980	0,499981	0,499982	0,499983	0,499983	0,499984	0,499985	0,499985	0,499986
4,2	0,499987	0,499987	0,499988	0,499988	0,499989	0,499989	0,499990	0,499990	0,499991	0,499991
4,3	0,499991	0,499992	0,499992	0,499993	0,499993	0,499993	0,499993	0,499994	0,499994	0,499994
4,4	0,499995	0,499995	0,499995	0,499995	0,499995	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996
4,5	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499998	0,499998	0,499998
4,6	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499999	0,499999
4,7	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999
4,8	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999
4,9	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000