Основные формулы комбинаторики.

Задачи, цель которых – определение числа способов осуществление того или иного действия, называются комбинаторными, а наука, изучающая способы решения таких задач называется комбинаторикой.

Выборки без повторений.

Выборки объёма *m* из совокупности *n* различных элементов

Если одна от другой отличается либо составом элементов, либо порядком их расположения

Размещения без повторений объёма *m* из данных *n* элементов.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \ (n \geq m)$$

Если одно от другого отличаются только порядком расположения элементов

Перестановки без повторений объёма *m*.

$P_m = m!$ (получена из $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, где $n=m$)

Если одно от другого отличаются хотя бы одним элементом (только составом).

Сочетания без повторений объёма *m* из данных *n* элементов.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \ (n \geq m)$$

Выборки с повторениями.

Выборки объёма *m* из совокупности повторяющихся элементов *n* различных классов

Если одна от другой отличается либо составом элементов, либо порядком их расположения

Размещения с повторениями объёма *m* из повторяющихся элементов *n* различных классов.

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Если одно от другого отличаются только порядком расположения элементов

Перестановки с повторениями, где элемент *i*-го класса (*i*=1,2,…n) повторяется k_i раз

$$\overline{P}_{k_1;k_2;\ldots k_n} = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}, \ k = \Sigma k_i$$

Если одно от другого отличаются хотя бы одним элементом (только составом).

Сочетания с повторениями объёма *m* из повторяющихся элементов *n* различных классов.

$$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

Правило суммы: если объект $x \in X$ может быть выбран n способами, а объект $y \in Y$ может быть выбран m способами, то выбор объекта «либо x, либо y» может быть осуществлён n+m способами.

Правило произведения: если объект $x \in X$ может быть выбран n способами и после каждого из таких выборов объект $y \in Y$ может быть выбран m способами, то выбор объекта «x и y» (упорядоченной пары (x, y)) может быть осуществлён nm способами.

Задание 1. Вычислить, используя формулы комбинаторики для выборок без повторений:

Вычислить	Формула	Расчёт
A_7^3	$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$, $n\geq m$	$n=7\geq m=3$ $A_7^3=\dfrac{7!}{(7-3)!}=\dfrac{7!}{4!}=\dfrac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!}=210$
A_{10}^4	$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$, $n\geq m$	$n=$____$m=$____ $A_{10}^4=\dfrac{\quad!}{(\quad-\quad)!}=$
A_6^6	$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$, $n\geq m$	$n=$____$m=$____ $A_6^6=\dfrac{\quad!}{(\quad-\quad)!}=$
A_5^7	$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$, $n\geq m$	$n=$____$m=$____ $A_5^7=$
P_6	$P_m=m!$	$m=6$ $P_6=6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$
P_4	$P_m=m!$	$m=$__ $P_4=$
C_7^3	$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $n\geq m$	$n=7\geq m=3$ $C_7^3=\dfrac{7!}{3!\cdot(7-3)!}=\dfrac{7!}{3!\cdot 4!}=\dfrac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4!}=35$
C_{11}^8	$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $n\geq m$	$n=$____$m=$____ $C_{11}^8=$
C_6^6	$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $n\geq m$	$n=$____$m=$____ $C_6^6=$
C_5^7	$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $n\geq m$	$n=$____$m=$____ $C_5^7=$

Задание 2. Вычислить, используя формулы комбинаторики для выборок с повторениями:

Вычислить	Формула	Расчёт
$\overline{A}_7^3$	$\overline{A}_n^m = n^m$	n=7; m=3 $\overline{A}_7^3 = 7^3 = 343$
$\overline{A}_{10}^4$	$\overline{A}_n^m = n^m$	n=____ m=____ $\overline{A}_{10}^4 =$
$\overline{A}_6^6$	$\overline{A}_n^m = n^m$	n=____ m=____ $\overline{A}_6^6 =$
$\overline{A}_5^7$	$\overline{A}_n^m = n^m$	n=____ m=____ $\overline{A}_5^7 =$
$\overline{P}_{2;1;3}$	$\overline{P}_{k_1;k_2;\ldots k_n} = \frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$, $k=\Sigma k_i$	k_1=2; k_2=1; k_3=3; k=2+1+3=6 $\overline{P}_{2;1;3} = \frac{6!}{2!\cdot 1!\cdot 3!} =$ ________
$\overline{P}_{4;2}$	$\overline{P}_{k_1;k_2;\ldots k_n} = \frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$, $k=\Sigma k_i$	k_1=__; k_2=__; k=_______ $\overline{P}_{4;2} =$ ______
$\overline{C}_7^3$	$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$	n=7; m=3 $\overline{C}_7^3 = \frac{(3+7-1)!}{3!\cdot(7-1)!} = \frac{9!}{3!\cdot 6!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6!} =$
$\overline{C}_{11}^8$	$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$	n=____ m=____ $\overline{C}_{11}^8 = \frac{(8+11-1)!}{8!\cdot(11-1)!} =$
$\overline{C}_6^6$	$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$	n=____ m=____ $\overline{C}_6^6 =$
$\overline{C}_5^7$	$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$	n=____ m=____ $\overline{C}_5^7 =$

Задача 1.

Сколько различных трёхзначных чисел можно составить, при условии, что цифры в числе не повторяются.

Решение:

Данная задача на размещения без повторений объёма *m* из данных *n* элементов (так как один вариант числа от другого может отличаться либо составом элементов____________, либо порядком их расположения ________________).

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},\ (n \geq m)$$

n=____

m=____

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} =$$

Заметим, что в данное число вариантов вошли те «трёхзначные числа», которые таковыми не являются с точки зрения математики – это, например, числа_________________________ («числа с нулём впереди»). Соответственно их нужно пересчитать и исключить из данной совокупности.

Разобьём все числа на десять классов:

«1 класс» - числа с единицей впереди:……………………………………………………...;

«2 класс» - числа с двойкой впереди……………………………………………………..;

«3 класс» - числа с тройкой впереди……………………………………………………..;

«4 класс» - числа с четвёркой впереди: ………………………………………………….;

«5 класс» - числа с пятёркой впереди: …………………………………………………...;

«6 класс» - числа с шестёркой впереди: ………………………………………………….;

«7 класс» - числа с семёркой впереди: …………………………………………………..;

«8 класс» - числа с восьмёркой впереди: ..……………………………………………….;

«9 класс» - числа с девяткой впереди: …………………………………………………...;

«10 класс» - числа с нулём впереди: ………………………………………………….;

Соответственно, в каждом классе будет одинаковое число элементов:

Ответ:__________.

Задача 2.

Сколько различных десятизначных чисел можно составить, при условии, что цифры в числе не повторяются.

Решение:

1. Данная задача очень похожа на предыдущую - на размещения без повторений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},\ (n \geq m)$$

n=_____________________________________; *m*=_____________________________________

$$A \ \ = \frac{\ \ !}{(\ \ -\ \ )!} = \frac{\ \ !}{\ \ !} =$$

Заметим, что в данное число вариантов вошли те «десятизначные числа», которые таковыми не являются с точки зрения математики – это, например, числа_________________________ («числа с нулём впереди»). Соответственно их нужно пересчитать и исключить из данной совокупности.

Разобьём все числа также на десять классов. Соответственно, в каждом классе будет одинаковое число элементов

Ответ:__________.

2. Данная задача всё-таки относится к теме перестановки без повторений объёма *m* (так как один вариант числа от другого может отличаться только порядком расположения элементов____).

$P_m = m!$,

m=___________________________________

Далее аналогично, разобьём все числа также на десять классов. Соответственно, в каждом классе будет одинаковое число элементов

Ответ:__________.

Задача 3.

Сколько слов можно получить при перестановке букв слова «ОТЕЦ».

Решение:

Данная задача относится к теме перестановки без повторений объёма *m*:

Ответ:__________.

Задача 4.

Сколько различных делегаций в составе трёх человек можно выбрать от коллектива, в котором десять человек.

Решение:

Данная задача на сочетания без повторений объёма *m* из данных *n* элементов (так как один вариант делегации от другого может отличаться только составом).

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, ($n \geq m$)

n=_____________________; *m*=_____________________;

$C_{10}^3 = \frac{\quad!}{\quad!\cdot(\quad - \quad)!} =$

Ответ:__________.

Задача 5.

Сколько различных трёхзначных номеров можно составить, при условии, что цифры в числе могут повторяться.

Решение:

Данная задача на размещения с повторениями объёма *m* из повторяющихся элементов *n* различных классов.

$\overline{A}_n^m = n^m$

Ответ:__________.

Задача 6.

Сколько слов можно получить при перестановке букв слова «ПАПА», «КОЛОКОЛ».

Решение:

Данная задача относится к теме перестановки с повторениями где элемент *i*-го класса (i=1,2,…n) повторяется k_i раз

$$\overline{P}_{k_1;k_2;\ldots k_n}=\frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!},\ k=\Sigma k_i:$$

- ✓ **«ПАПА»**

k=

k_1=____**(П)**; k_2=____**(А)**;

$$\overline{P}_{\ldots\ldots}=\frac{\ldots.!}{\ldots..!\ldots..!}$$

- ✓ **«КОЛОКОЛ»**

k=

k_1=____**(К)**; k_2=____**(О)**; k_3=____**(Л)**;

$$\overline{P}_{\ldots\ldots}=\frac{\ldots.!}{\ldots..!\ldots..!\ldots..!}$$

Ответ:__________.

Задача 7.

Сколько различных наборов открыток в количестве 4 штук (6 штук или 8 штук) может приобрести покупатель, если в продаже имеется 6 видов.

Решение:

Данная задача относится к теме сочетания с повторениями m из повторяющихся элементов n различных классов:

$$\overline{C}_n^m=\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}:$$

- ✓ **«4 штуки»**

m=____; n=____;

$$\overline{C}_{\ldots..}^{\ldots..}=\frac{(\ldots..+\ldots..-1)!}{\ldots..!(\ldots..-1)!}=$$

- ✓ **«6 штук»**

m=____; n=____;

$$\overline{C}_{\ldots..}^{\ldots..}=\frac{(\ldots..+\ldots..-1)!}{\ldots..!(\ldots..-1)!}=$$

- ✓ **«8 штук»**

m=____; n=____;

$$\overline{C}_{\ldots..}^{\ldots..}=\frac{(\ldots..+\ldots..-1)!}{\ldots..!(\ldots..-1)!}=$$

Ответ:__________________.