Контрольная работа №1 по теории вероятностей

*Контрольная работа №1 по теории вероятностей выполняется только в тетради в клетку, объёмом от 18 до 24 листов или более (**работы, выполненные на компьютере, к проверке не допускаются**).*

В тетради должны быть обязательно проведены поля. Контрольная работа должна быть написана аккуратно чернилами синего (фиолетового) цвета. Не допускается использование ручек красного цвета. При этом рекомендуется использование ручек других цветов (кроме красного) для выделения номеров решаемых задач, условий, промежуточных ответов и самих ответов.

Все задачи, предлагаемые для решения, должны быть обязательно решены по порядку, подробно с необходимыми пояснениями и с указанием математических формул. Чертежи должны быть выполнены с помощью карандаша и линейки.

Контрольная работа должна быть выполнена самостоятельно. Для решения задач рекомендуется использовать методические указания или записи лекций и практических занятий. В случае использования других книг, необходимо дать ссылки на эти источники и быть готовым к защите контрольной работы по данным методам.

*Контрольная работа №1 должна быть сдана для её регистрации в учебный отдел (а не преподавателю) –**до начала очередной сессии**.*

На титульном листе контрольной работы не забудьте указать свои: ФИО, № шифра (по зачётной книжке или, что то же, самое по студенческому билету), № варианта и другие требуемые данные. Контрольная работа, решённая по другому варианту проверке не подлежит. Для того, чтобы контрольная работа не была «потеряна», необходимо указать ФИО преподавателя, который будет её проверять (Конюченко Оксана Наильевна).

После возвращения преподавателем проверенной работы, необходимо устранить замечания и исправить ошибки. Работа над ошибками должна быть выполнена в этой же тетради или полностью переписана в случае большого объёма неверно решённых задач. Работа над ошибками (вместе с проверенной ранее работой сдаётся для перепроверки непосредственно в руки преподавателю).

Студенты, выполнившие контрольную работу и работу над ошибками (по необходимости) допускаются к её защите, которая состоится в период сессии на консультации перед зачётом (экзаменом).

Зачет (экзамен) по теории вероятностей будет сдаваться в виде тестов на компьютере

Таблицы для определения задач контрольной работы по двум последним цифрам зачётной книжки.

			Последняя цифра зачетной книжки									
Предпоследняя цифра зачетной книжки			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	задача 1	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		задача 2	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19
		задача 3	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		задача 4	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19
		задача 5	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		задача 6	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19
		задача 7	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		задача 8	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	задача 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		задача 2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		задача 3	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		задача 4	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1
		задача 5	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		задача 6	13	14	15	16	17	18	19	20	1	2
		задача 7	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		задача 8	14	15	16	17	18	19	20	1	2	3
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	задача 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		задача 2	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1
		задача 3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		задача 4	13	14	15	16	17	18	19	20	1	2
		задача 5	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		задача 6	14	15	16	17	18	19	20	1	2	3
		задача 7	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		задача 8	15	16	17	18	19	20	1	2	3	4
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	3	задача 1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		задача 2	13	14	15	16	17	18	19	20	1	2
		задача 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		задача 4	14	15	16	17	18	19	20	1	2	3
		задача 5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		задача 6	15	16	17	18	19	20	1	2	3	4
		задача 7	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		задача 8	16	17	18	19	20	1	2	3	4	5
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	4	задача 1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		задача 2	14	15	16	17	18	19	20	1	2	3
		задача 3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		задача 4	15	16	17	18	19	20	1	2	3	4
		задача 5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		задача 6	16	17	18	19	20	1	2	3	4	5
		задача 7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		задача 8	17	18	19	20	1	2	3	4	5	6

Задача 1.

В урне содержится K черных и H белых шаров. Случайным образом вынимают M шаров. Найти вероятность того, что среди них имеется: а) ровно P белых шара, б) меньше, чем P белых шара, в) хотя бы 1 белый шар. Значения K, H, M и P даны в таблице (Табл.1).

Табл.1

вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
K	7	6	6	7	7	8	6	4	5	7
H	6	4	8	4	5	5	7	7	6	5
M	5	4	5	4	4	6	5	4	4	4
P	3	2	3	3	2	3	4	2	3	2

вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
K	8	6	4	8	5	7	5	6	5	6
H	6	5	6	6	6	4	7	5	7	7
M	4	4	4	5	5	5	4	5	5	5
P	3	3	3	2	4	3	3	2	4	3

Задача 2.

Вариант 1.

По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй группе – 15 из 25. найти вероятность того, наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.

Вариант 2.

При проверке изделия на соответствие стандарту вероятность того, что оно пройдет через первого контролера, равна 0,55, а через второго – 0,45. Вероятность признания бездефектного изделия стандартным у первого контролера равна 0,9, а у второго – 0,98. Бездефектное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие прошло через второго контролера.

Вариант 3.

Два завода производят холодильники одной и той же марки, причем первый завод выпускает продукции вдвое больше, чем второй. Первый завод производит в среднем 70% холодильников высшего качества, а второй - 80%. Выбранный наугад холодильник оказался высшего качества. Найти вероятность того, что холодильник изготовлен на первом заводе.

Вариант 4.

В первом ящике содержится 7 синих и 5 красных шаров, во втором - 4 синих и 4 красных. Наудачу был выбран ящик и из него наудачу извлечен шар, который оказался красным. Найти вероятность того, что этот шар был извлечен из первого ящика.

Вариант 5.

В трех студенческих группах обучается 75 студентов, из них 25 в первой группе, 30 – во второй, остальные в третьей. Успешно сдали экзамен 22 студента из первой группы, 24 из второй и 15 из третьей. Наудачу выбранный студент сдал экзамен. Найти вероятность того, что он учится во второй группе.

Вариант 6.

В магазине продается 25 телевизоров, из них 9 выпущены первым заводом, 10 – вторым и остальные – третьим. Известно, что среди всех телевизоров, выпущенных первым, вторым и третьим заводом, имеют брак соответственно 5%, 12% и 10% телевизоров. Купленный телевизор оказался с дефектом. Найти вероятность того, что он был изготовлен третьим заводом.

Вариант 7.

В первом ящике содержится 8 шаров, из них 3 белых, во втором – 15, из которых 6 белых, в третьем – 10 шаров, из них 7 белых. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар извлечен из второго ящика.

Вариант 8.

Консервоперерабатывающий завод отправляет треть перерабатываемой продукции на первый склад, пятую часть – на второй и остальную продукцию – на третий. После хранения годным к употреблению. Является 90% продукции, хранившейся на первом складе, 80% продукции – на втором и 85% - на третьем. Наудачу взятая единица продукции оказалась годной. Найти вероятность того, что эта продукция хранилась на первом складе.

Вариант 9.

Пассажир за получением билета может обратиться в одну из трех касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, во вторую – 0,35 в третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3; для второй – 0,4; для третьей – 0,6. найти вероятность того, что купивший билет пассажир, приобрел его во второй кассе.

Вариант 10.

Имеется три урны. В первой из них 5 белых и 6 черных шаров, во второй 4 белых и 3 черных шара, в третьей 5 белых и 3 черных шара. Наугад выбирается урна и из нее вынимается шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар вынут из второй урны.

Вариант 11.

В магазин поступила обувь от двух поставщиков. Количество обуви, поступившей от первого поставщика, в два раза больше, чем от второго. Известно, что в среднем 20% обуви от первого поставщика и и35% обуви от второго поставщика имеют различные дефекты отделки. Из общей массы наугад выбирают одну упаковку с обувью. Оказалось, что обувь не имеет дефекта отделки. Найти вероятность того, что она изготовлена первым поставщиком.

Вариант 12.

К контролеру ОТК поступили изделия, изготовленные тремя рабочими. Причем первый предоставил 20 изделий, второй 15 и третий – 17. вероятность того, что изделие не имеет брака, равна: для первого рабочего – 0,6; для второго – 0,5; для третьего – 0,4. Контролер проверил одну деталь, она оказалась бракованной. Найти вероятность того, эту деталь изготовил первый рабочий.

Вариант 13.

Пассажир может приобрести билет в одной из двух касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4; а во вторую – 0,6. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира нужные ему билеты будут распроданы, равна 0,35 для первой кассы и 0,7 для второй. Пассажир посетил одну из касс и приобрел билет найти вероятность того, что он приобрел билет во второй кассе.

Вариант 14.

В магазин поступил одноименный товар, изготовленный двумя предприятиями. С первого предприятия поступило 150 единиц товара, из них 30 единиц первого сорта. Со второго предприятия – 200 единиц, из них 50 – первого сорта. Из общей массы извлекли единицу товара, который оказался первого сорта. Найти вероятность того, что извлеченный товар изготовлен на первом предприятии.

Вариант 15.

На автозаводе три конвейерных линии, причем на первой из них собирается 35% всех изделий, на второй 25%, на третьей – 45%. Вероятность брака для изделий, собранных на первой линии, равна 0,2; на второй – 0,1, на третьей – 0,15. Приобретенный покупателем автомобиль не имеет брака. Найти вероятность того, он собран на первой линии.

Вариант 16.

Покупатель желает приобрести электрическую лампочку. На полке в магазине лежат 200 лампочек, изготовленных на одном заводе и 150 на другом (все лампочки одинаковой мощности). Вероятность брака для первого завода составляет 0,01; для второго 0,005. Продавец взял лампочку для проверки, и она оказалась бракованной. Найти вероятность того, что лампочка изготовлена на втором заводе.

Вариант 17.

Преподаватель получил для проверки контрольные работы студентов трех групп: 28 работ студентов первой группы, 19 работ студентов второй группы и 20 работ студентов третьей группы. Вероятность того, что студент первой группы не допустит ни одной ошибки в контрольной работе, равна 0,4; второй – 0,35; третьей – 0,6. Выбранная случайным образом контрольная работа оказалась без единой ошибки. Найти вероятность того, что эта работа выполнена студентом третьей группы.

Вариант 18.

На автопредприятие поступили одноименные детали с двух заводов. Вероятность того, что деталь, изготовленная на первом заводе, не соответствует ГОСТу – 0,9; для второго – 0,3. Первый завод поставил 2000 деталей, второй – 3000. Сборщик взял одну деталь, которая оказалась соответствующей ГОСТу. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на первом заводе.

Вариант 19.

В магазин поступили холодильники трех фирм в количестве 35, 20 и 4 соответственно. Вероятность того, что холодильник не откажет в период гарантийного срока равна: для первой фирмы 0,95; для второй – 0,8; для третьей – 0,9.

Купленный холодильник оказался надежным. Найти вероятность того, что этот холодильник изготовлен второй фирмой.

Вариант 20.

В двух одинаковых коробках находятся карандаши. Известно, что 1/3 карандашей в первой коробке и ¼ карандашей во второй коробке характеризуются твердостью ТМ. Наугад выбирается коробка и из нее наугад извлекается карандаш. Он оказался твердости ТМ. Найти вероятность того, что карандаш извлечен из первой коробки.

Задача 3.

Вероятность возврата в срок потребительского кредита каждым из n заемщиков в среднем равна p. Найти вероятность того, что к назначенному сроку кредит вернут:

а) не менее k_1 человек и не более k_2 человека;

б) не менее k_2 человек;

в) не более k_3 человек.

Значения n, p, k_1, k_2, k_3 даны в таблице (Табл.2)

Табл.2

Вариант	n	k_1	k_2	k_3	p
1	120	100	115	114	0,75
2	150	120	140	139	0,90
3	220	180	200	199	0,95
4	275	250	265	264	0,96
5	110	70	95	94	0,8
6	130	85	105	104	0,85
7	135	100	120	119	0,97
8	150	130	145	144	0,95
9	160	145	155	154	0,9
10	175	160	170	169	0,85

Вариант	n	k_1	k_2	k_3	p
11	200	175	195	194	0,98
12	105	85	100	99	0,95
13	125	85	105	104	0,85
14	145	90	125	124	0,97
15	180	155	170	169	0,9
16	210	190	205	204	0,9
17	140	120	135	134	0,85
18	170	135	155	154	0,95
19	115	95	110	109	0,9
20	205	185	200	199	0,85

Задача 4.

Дискретная случайная величина задана таблицей (Табл.3). Найти p_5, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить графически функцию распределения.

Табл.3

1.	x_i	-3	-2	-1	1	2	2.	x_i	-7	-4	0	4	7
	p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	p_5
3.	x_i	-5	-2	0	2	5	4.	x_i	-3	-1	0	4	5
	p_i	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	p_5		p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	p_5
5.	x_i	-7	-4	0	4	7	6.	x_i	2	9	10	11	13
	p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	p_5
7.	x_i	-6	-4	-2	2	4	8.	x_i	1	3	5	7	9
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	p_5		p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	p_5
9.	x_i	-2	-1	0	3	5	10.	x_i	-3	-2	-1	1	2
	p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	p_5
11.	x_i	-5	-3	-1	1	5	12.	x_i	1	4	6	7	9
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,2	0,05	0,15	0,3	p_5
13.	x_i	1	3	5	7	9	14.	x_i	-2	0	3	6	8
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,3	0,15	0,3	0,2	p_5
15.	x_i	-5	-4	0	1	3	16.	x_i	2	4	5	10	12
	p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	0,1	0,15	0,3	0,2	p_5
17.	x_i	-1	0	1	2	3	18.	x_i	0	3	6	8	9
	p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	0,15	0,35	0,05	0,2	p_5
19.	x_i	-3	-2	1	2	7	20.	x_i	0	3	6	10	11
	p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,05	0,4	0,25	0,2	p_5

Задача 5.

Непрерывная случайная величина задана функцией плотности распределения $p(x)$. (Табл.4)

а) Найти функцию распределения $F(x)$, построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

б) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. в) Найти вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[a,b]$.

Табл.4

1.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ x-\frac{1}{2} & при \quad 1<x\le 2\\ 0 & при \quad x>2\end{cases}$ $P(1{,}5\le X\le 1{,}75)-?$	2.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ x-\frac{x^3}{4} & при \quad 0<x\le 2\\ 0 & при \quad x>2\end{cases}$ $P(0{,}5\le X\le 1{,}5)-?$
3.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 6\\ \frac{x}{9}-\frac{1}{2} & при \quad 6<x\le 9\\ 0 & при \quad x>9\end{cases}$ $P(3\le X\le 4)-?$	4.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \frac{2x-1}{6} & при \quad 0<x\le 3\\ 0 & при \quad x>3\end{cases}$ $P(1\le X\le 2{,}5)-?$
5.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 2\\ \frac{5}{4}-\frac{x}{4} & при \quad 2<x\le 4\\ 0 & при \quad x>4\end{cases}$ $P(2{,}5\le X\le 3{,}5)-?$	6.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \frac{x}{36}+\frac{1}{18} & при \quad 1<x\le 7\\ 0 & при \quad x>7\end{cases}$ $P(2\le X\le 5)-?$
7.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \frac{1}{4}-\frac{x}{36} & при \quad 0<x\le 6\\ 0 & при \quad x>6\end{cases}$ $P(0{,}5\le X\le 2{,}5)-?$	8.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 5\\ \frac{4}{5}-\frac{2x}{25} & при \quad 5<x\le 10\\ 0 & при \quad x>10\end{cases}$ $P(6\le X\le 9)-?$
9.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \frac{11}{18}-\frac{x}{9} & при \quad 1<x\le 4\\ 0 & при \quad x>4\end{cases}$ $P(2\le X\le 3)-?$	10.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 7\\ \frac{2x}{5}-\frac{27}{10} & при \quad 7<x\le 9\\ 0 & при \quad x>9\end{cases}$ $P(8\le X\le 8{,}5)-?$

11.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \frac{x}{32} & при \quad 0<x\le 8\\ 0 & при \quad x>8\end{cases}$ $P(1\le X\le 7)-?$	12.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \frac{3x^2}{64} & при \quad 0<x\le 4\\ 0 & при \quad x>4\end{cases}$ $P(0\le X\le 2)-?$
13.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 6\\ \frac{x}{9}-\frac{1}{2} & при \quad 6<x\le 9\\ 0 & при \quad x>9\end{cases}$ $P(3\le X\le 4)-?$	14.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \frac{2x-1}{6} & при \quad 0<x\le 3\\ 0 & при \quad x>3\end{cases}$ $P(1\le X\le 2{,}5)-?$
15.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \frac{2x-1}{2} & при \quad 1<x\le 2\\ 0 & при \quad x>2\end{cases}$ $P(0{,}5\le X\le 1{,}5)-?$	16.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 6x+2 & при \quad 0<x\le \frac{1}{3}\\ 0 & при \quad x>\frac{1}{3}\end{cases}$ $P(0{,}1\le X\le 0{,}2)-?$
17.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \frac{2x+1}{2} & при \quad 0<x\le 1\\ 0 & при \quad x>1\end{cases}$ $P(\frac{1}{6}\le X\le \frac{5}{6})-?$	18.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \frac{2x-1}{6} & при \quad 1<x\le 3\\ 0 & при \quad x>3\end{cases}$ $P(1{,}5\le X\le 3{,}5)-?$
19.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 3x^2 & при \quad 0<x\le 1\\ 0 & при \quad x>1\end{cases}$ $P(0{,}5\le X\le 1)-?$	20.	$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 4\\ \frac{x}{6}-\frac{1}{3} & при \quad 4<x\le 6\\ 0 & при \quad x>6\end{cases}$ $P(5\le X\le 6)-?$

Задача 6.

Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно M, а вероятность ее попадания в интервал $(\alpha;\beta)$ равна P. Найти среднее квадратическое отклонение σ случайной величины. Значения M,α,β,P даны в таблице (Табл.5)

Табл.5

Вариант	α	M	β	P
1	36	40	44	0,966
2	40	42	44	0,98
3	51	56	61	0,97
4	17	20	23	0,96
5	23	26	29	0,81
6	15	18	21	0,88
7	18	22	26	0,97
8	30	32	34	0,99
9	41	45	49	0,98
10	29	33	37	0,966

Вариант	α	M	β	P
11	9	13	17	0,98
12	22	24	26	0,966
13	52	55	58	0,82
14	42	47	52	0,97
15	21	23	25	0,89
16	11	16	21	0,9
17	38	41	44	0,95
18	32	35	38	0,95
19	12	15	18	0,96
20	23	25	27	0,85

Задача 7.

Для заданной выборки из генеральной совокупности случайной величины X (n=100) необходимо:

а) определить размах варьирования случайной величины и составить вариационный ряд распределения;

б) по формуле Стерджеса определить длину интервалов и составить интервальный вариационный ряд;

в) найти выборочную среднюю $\overline{x}_в$, выборочную дисперсию $D_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$, моду M_o, медиану M_e; коэффициент вариации $\delta_в$;

г) построить эмпирическую функцию распределения вероятностей $F^*(x)$;

д) построить гистограмму относительных частот и линию эмпирической плотности.

1 вариант:

47	57	51	45	55	47	48	52	59	46
45	51	52	45	40	58	50	53	57	47
51	47	54	41	62	55	54	49	47	63
55	47	51	54	50	53	48	43	52	45
50	48	55	49	50	51	49	48	50	51
53	54	44	47	47	50	50	53	55	53
51	57	53	50	49	51	46	51	44	51
47	58	46	47	52	48	46	54	53	45
51	55	53	49	50	49	47	59	53	44
52	50	56	50	60	44	50	54	41	60

2 вариант:

40	43	47	45	42	39	41	36	42	38
51	51	44	36	30	44	42	43	43	38
45	39	48	40	34	45	40	40	47	36
50	56	36	38	32	41	49	45	43	41
40	53	40	37	53	51	49	52	47	47
43	48	45	40	49	39	46	40	47	50
40	34	38	35	44	42	43	41	44	42
43	45	46	52	42	51	45	49	53	52
34	41	36	33	33	40	43	42	34	43
46	42	42	45	45	48	48	42	51	38

3 вариант:

83	77	58	87	67	74	55	70	66	76
67	78	72	78	77	67	59	64	67	66
71	76	80	62	68	59	71	52	64	66
62	65	69	59	67	67	58	74	68	71
67	65	79	83	76	79	65	83	90	75
61	68	78	82	66	79	70	78	60	75
76	64	75	82	75	65	68	63	69	72
86	65	82	75	67	82	56	78	74	65

61	64	76	71	70	73	70	71	56	79
67	75	75	80	65	67	74	62	93	60

4 вариант:

58	59	58	57	59	48	54	53	66	64
56	54	54	53	64	53	63	64	53	61
56	53	64	60	57	61	60	63	59	58
55	60	66	56	56	51	58	66	54	55
57	57	64	56	58	54	57	60	60	64
55	59	49	56	48	55	50	47	61	64
53	58	62	54	56	56	57	52	59	58
53	62	65	58	57	62	57	59	52	65
47	56	65	56	57	55	58	57	66	59
59	61	62	64	59	57	66	62	69	66

5 вариант:

67	70	74	71	73	72	78	77	70	75
71	78	82	66	74	76	85	77	77	78
84	86	74	68	73	73	75	79	76	66
73	77	83	76	71	71	67	70	65	69
78	81	78	76	78	77	59	72	78	67
82	74	74	67	73	79	79	75	70	85
75	73	74	81	73	79	67	79	70	69
77	61	69	73	82	71	76	72	71	78
81	82	68	85	76	82	78	79	75	75
72	73	80	81	77	79	74	74	71	74

6 вариант:

75	67	69	69	60	64	85	85	77	80
62	75	69	81	79	63	69	60	77	74
54	77	61	78	77	60	66	73	73	55
80	73	73	70	72	81	72	86	69	89
73	76	74	62	63	84	91	82	67	81
85	75	56	77	76	71	73	66	75	67
76	82	77	88	72	83	91	83	68	62
69	80	73	84	72	81	85	62	82	84
84	81	78	79	57	61	75	60	78	68
61	94	78	67	77	78	81	67	71	74

7 вариант:

60	62	62	56	59	56	63	61	59	64
59	62	67	59	56	62	60	61	60	66
60	61	63	64	57	58	56	60	60	63
64	56	57	67	59	62	60	55	60	56
60	55	58	63	59	57	65	61	66	64

63	66	56	63	67	63	63	62	64	69
57	67	59	55	60	64	57	62	66	59
64	53	63	58	65	58	66	63	64	61
62	67	65	61	59	65	62	58	59	63
58	65	59	60	67	62	66	62	57	62

8 вариант:

48	51	47	53	49	42	38	44	45	47
36	43	42	47	50	40	45	40	56	46
50	57	52	55	42	40	40	48	55	41
47	52	51	50	48	39	50	45	48	44
48	58	40	53	43	44	46	47	39	42
45	45	49	56	54	48	54	45	53	46
51	37	42	51	38	46	53	48	41	42
46	49	37	42	45	56	49	38	45	50
44	51	43	47	47	50	56	55	48	45
44	54	38	51	53	36	41	41	41	49

9 вариант:

69	66	58	70	65	56	48	59	61	58
48	56	57	62	65	57	56	53	74	59
68	77	68	72	56	51	53	64	53	54
64	69	65	67	63	52	66	60	60	58
62	76	52	73	61	59	60	63	51	54
55	62	64	75	69	63	72	72	54	62
67	46	52	68	48	60	69	65	48	53
59	65	43	56	58	73	67	51	61	66
57	68	53	64	52	66	76	75	63	61
57	71	51	60	70	47	57	52	63	58

10 вариант:

47	57	51	45	55	47	48	52	59	46
45	51	52	45	40	58	50	53	57	47
51	47	54	41	62	55	54	49	47	63
55	47	51	54	50	53	48	43	52	45
50	48	55	49	50	51	49	48	50	51
53	54	44	47	47	50	50	53	55	53
51	57	53	50	49	51	46	51	44	51
47	58	46	47	52	48	46	54	53	45
51	55	53	49	50	49	47	59	53	44
52	50	56	50	60	44	50	54	41	60

11 вариант:

57	47	51	45	55	47	48	52	59	46
45	51	52	45	40	58	50	53	57	47

51	47	54	41	62	55	54	49	47	63
55	47	51	54	50	53	48	43	52	45
50	48	55	49	50	51	49	48	50	51
53	54	44	47	47	50	50	53	55	53
51	57	53	50	49	51	46	51	44	51
47	58	46	47	52	48	46	54	53	45
51	55	53	49	50	49	47	59	53	44
52	50	56	50	60	44	50	54	41	60

12 вариант:

43	40	47	45	42	39	41	36	42	38
51	51	44	36	30	44	42	43	43	38
45	39	48	40	34	45	40	40	47	36
50	56	36	38	32	41	49	45	43	41
40	53	40	37	53	51	49	52	47	47
43	48	45	40	49	39	46	40	47	50
40	34	38	35	44	42	43	41	44	42
43	45	46	52	42	51	45	49	53	52
34	41	36	33	33	40	43	42	34	43
46	42	42	45	45	48	48	42	51	38

13 вариант:

67	77	58	87	67	74	55	70	66	76
83	78	72	78	77	67	59	64	67	66
71	76	80	62	68	59	71	52	64	66
62	65	69	59	67	67	58	74	68	71
67	65	79	83	76	79	65	83	90	75
61	68	78	82	66	79	70	78	60	75
76	64	75	82	75	65	68	63	69	72
86	65	82	75	67	82	56	78	74	65
61	64	76	71	70	73	70	71	56	79
67	75	75	80	65	67	74	62	93	60

14 вариант:

56	59	58	57	59	48	54	53	66	64
58	54	54	53	64	53	63	64	53	61
56	53	64	60	57	61	60	63	59	58
55	60	66	56	56	51	58	66	54	55
57	57	64	56	58	54	57	60	60	64
55	59	49	56	48	55	50	47	61	64
53	58	62	54	56	56	57	52	59	58
53	62	65	58	57	62	57	59	52	65
47	56	65	56	57	55	58	57	66	59
59	61	62	64	59	57	66	62	69	66

15 вариант:

71	70	74	71	73	72	78	77	70	75
67	78	82	66	74	76	85	77	77	78
84	86	74	68	73	73	75	79	76	66
73	77	83	76	71	71	67	70	65	69
78	81	78	76	78	77	59	72	78	67
82	74	74	67	73	79	79	75	70	85
75	73	74	81	73	79	67	79	70	69
77	61	69	73	82	71	76	72	71	78
81	82	68	85	76	82	78	79	75	75
72	73	80	81	77	79	74	74	71	74

16 вариант:

75	62	69	69	60	64	85	85	77	80
67	75	69	81	79	63	69	60	77	74
54	77	61	78	77	60	66	73	73	55
80	73	73	70	72	81	72	86	69	89
73	76	74	62	63	84	91	82	67	81
85	75	56	77	76	71	73	66	75	67
76	82	77	88	72	83	91	83	68	62
69	80	73	84	72	81	85	62	82	84
84	81	78	79	57	61	75	60	78	68
61	94	78	67	77	78	81	67	71	74

17 вариант:

62	60	62	56	59	56	63	61	59	64
59	62	67	59	56	62	60	61	60	66
60	61	63	64	57	58	56	60	60	63
64	56	57	67	59	62	60	55	60	56
60	55	58	63	59	57	65	61	66	64
63	66	56	63	67	63	63	62	64	69
57	67	59	55	60	64	57	62	66	59
64	53	63	58	65	58	66	63	64	61
62	67	65	61	59	65	62	58	59	63
58	65	59	60	67	62	66	62	57	62

18 вариант:

36	51	47	53	49	42	38	44	45	47
48	43	42	47	50	40	45	40	56	46
50	57	52	55	42	40	40	48	55	41
47	52	51	50	48	39	50	45	48	44
48	58	40	53	43	44	46	47	39	42
45	45	49	56	54	48	54	45	53	46
51	37	42	51	38	46	53	48	41	42
46	49	37	42	45	56	49	38	45	50
44	51	43	47	47	50	56	55	48	45
44	54	38	51	53	36	41	41	41	49

19 вариант:

66	69	58	70	65	56	48	59	61	58
48	56	57	62	65	57	56	53	74	59
68	77	68	72	56	51	53	64	53	54
64	69	65	67	63	52	66	60	60	58
62	76	52	73	61	59	60	63	51	54
55	62	64	75	69	63	72	72	54	62
67	46	52	68	48	60	69	65	48	53
59	65	43	56	58	73	67	51	61	66
57	68	53	64	52	66	76	75	63	61
57	71	51	60	70	47	57	52	63	58

20 вариант:

57	47	51	45	55	47	48	52	59	46
45	51	52	45	40	58	50	53	57	47
51	47	54	41	62	55	54	49	47	63
55	47	51	54	50	53	48	43	52	45
50	48	55	49	50	51	49	48	50	51
53	54	44	47	47	50	50	53	55	53
51	57	53	50	49	51	46	51	44	51
47	58	46	47	52	48	46	54	53	45
51	55	53	49	50	49	47	59	53	44
52	50	56	50	60	44	50	54	41	60

Задача 8.

Выборка X объемом N=100 измерений задана таблицей (Табл.6):

Табл.6

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
m_i	5	13	20+(m+n)	30-(m+n)	19	10	3

Где x_i - результаты измерений, m_i - частоты, с которыми встречаются значения x_i, $\sum_{i=1}^{7} x_i = 100$, x_i=0,2m+0,3(i-1)n. Значения m и n даны в таблице (Табл.7). Найти распределение относительных частот, размах варирования, полигон частот, выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, моду, медиану и коэффициент вариации.

Табл.7

вариант	m	n		вариант	m	n
1	4	3		11	4	1
2	3	2		12	3	4
3	5	1		13	5	5
4	3	4		14	1	3
5	1	5		15	3	1
6	2	3		16	4	3
7	4	1		17	2	2
8	2	5		18	2	1
9	1	2		19	1	4
10	5	4		20	5	5

Примеры решения задач

Пример 1.

В урне содержится 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется: а) ровно 2 белых шара, б) меньше, чем 2 белых шара, в) хотя бы 1 белый шар.

Решение:

а) Пусть событие А – среди вынутых шаров ровно два белых (тогда два других вынутых шара – черные). Вероятность этого события найдем, используя классическую формулу вероятности: $P(A)=\frac{m}{n}$, где n- число всевозможных элементарных исходов, m – число элементарных исходов, благоприятствующих данному событию. Элементарными исходами являются всевозможные сочетания:

$$n=C_{11}^{4}=\frac{11!}{4!\cdot(11-4)!}=\frac{11!}{4!\cdot 7!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7!}=330;$$

$$m=C_{6}^{2}C_{5}^{2}=\frac{6!}{2!\cdot(6-2)!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}=15\cdot 10=150.$$

Получаем: $P(A)=\frac{150}{330}=\frac{5}{11}.$

б) Пусть событие В – среди вынутых шаров меньше, чем два белых шара. Это возможно, когда вынули один белый и три черных шара или ноль белых и четыре черных шара. Поэтому

$$m=C_{6}^{1}C_{5}^{3}+C_{6}^{0}C_{5}^{4}=\frac{6!}{1!\cdot(6-1)!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}+\frac{6!}{0!\cdot(6-0)!}\cdot\frac{5!}{4!\cdot(5-4)!}=60+5=65.$$

Получаем: $P(B)=\frac{65}{330}=\frac{13}{66}$.

в) Пусть событие С – среди вынутых шаров хотя бы один белый шар. Перейдем к противоположному событию $\overline{C}$ - среди вынутых шаров нет ни одного белого, то есть все вынутые шары – черные. Следовательно $m=C_{5}^{4}\cdot C_{6}^{0}=5.$

Получаем: $P(\overline{C})=\frac{5}{330}=\frac{1}{66}$, тогда $P(C)=1-\frac{1}{66}=\frac{65}{66}.$

Ответ: а) 5/11, б) 13/66, в) 65/66.

Пример 2.

В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов в количестве 19, 6 и 11 штук соответственно, которые могут работать до конца гарантийного срока с вероятностями 0,85; 0,76 и 0,71 соответственно. Рабочий берет случайно электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым или третьим заводом.

Решение:

Рассмотрим событие А, которое заключается в том, что электродвигатель работает безотказно до конца гарантийного срока. И гипотезы H_1, H_2, H_3, заключающиеся в том, что электродвигатель поставлен с первого, второго или третьего завода соответственно.

Всего имеется 36 электродвигателей. Тогда вероятности того, что электродвигатель поставлен с первого, второго или третьего завода соответственно, будут равны:

$$P(H_1) = \frac{19}{36} = 0,528, \quad P(H_2) = \frac{6}{36} = 0,167, \; P(H_3) = \frac{11}{36} = 0,306.$$

Из условия задачи известны условные вероятности:

$P_{H_1}(A) = 0,85$ – вероятность того, что поставленный первым заводом двигатель работает безотказно;

$P_{H_2}(A) = 0,76$ – вероятность того, что поставленный вторым заводом двигатель работает безотказно;

$P_{H_3}(A) = 0,71$ – вероятность того, что поставленный третьим заводом двигатель работает безотказно;

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= 0,85 \cdot 0,528 + 0,76 \cdot 0,167 + 0,71 \cdot 0,306 = 0,792.$$

Это вероятность того, что электродвигатель проработает безотказно до конца гарантийного срока.

Теперь воспользуемся формулами Байеса: $P_A(H_i) = \dfrac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}$,

где $P(A)$ – полная вероятность.

Получаем:

$P_A(H_1) = \dfrac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \dfrac{0,528 \cdot 0,85}{0,792} = 0,566$ – вероятность того, что работающий безотказно двигатель поставлен первым заводом;

$P_A\ (H_2)=\dfrac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\dfrac{0{,}167\cdot 0{,}76}{0{,}792}=0{,}160$ – вероятность того, что работающий безотказно двигатель поставлен вторым заводом;

$P_A\ (H_3)=\dfrac{P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}{P(A)}=\dfrac{0{,}306\cdot 0{,}71}{0{,}792}=0{,}274$ – вероятность того, что работающий безотказно двигатель поставлен третьим заводом.

Ответ: $P_A(H_1)=0{,}566,\quad P_A(H_2)=0{,}160,\quad P_A(H_3)=0{,}274.$

Пример 3.

Вероятность появления события *A* в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p = 0,8. Найти вероятность того, что событие появится:

а) не менее 75 раз и не более 90 раз;
б) не менее 75 раз;
в) не более 74 раз.

Решение:

а) Согласно интегральной теореме Лапласа, если вероятность появления события *A* в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, то вероятность того, что во всех этих испытаниях событие А появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно определяется формулой

$$P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа.

По условию задачи $n=100$, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$, $k_1=75$, $k_2=90$.

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{75-80}{\sqrt{16}}=-\frac{5}{4}=-1{,}25;$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{90-80}{\sqrt{16}}=\frac{10}{4}=2{,}5.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. Приложение Б), учитывая нечетность этой функции, находим

$$\Phi(x_1)=\Phi(-1{,}25)=-\Phi(1{,}25)=-0{,}3944;$$

$$\Phi(x_2)=\Phi(2{,}5)=0{,}4938.$$

Тогда

$$P_{100}(75{,}90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}4938 - (-0{,}3944) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

б) Требование, что событие А появится не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76, либо 77, …, либо 100 (больше 100 быть не может по условию задачи). Значит, в рассматриваемом случае следует принять, что $k_1 = 75$, $k_2 = 100$, тогда

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{75 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25;$$
$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{100 - 80}{\sqrt{16}} = \frac{20}{4} = 5.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. Практика 3), учитывая нечетность этой функции, находим

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}3944;$$
$$\Phi(x_2) = \Phi(5) = 0{,}5.$$

Тогда $P_{100}(75{,}100) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}5 - (-0{,}3944) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944.$

в) События «А появится не более 74 раз» и «А появится не менее 75 раз» противоположны, поэтому $P_{100}(0;74) = 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$

Ответ: а) 0,8882; б)0,8944; в) 0,1056.

Пример 4.

Дискретная случайная величина задана таблицей:

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	p_5

Найти P_5, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить графически функцию распределения.

Решение:

Для любой дискретной случайной величины $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Получаем: 0,1+0,2+0,3+0,25+ p_5=1. Отсюда p_5=1-0,85=0,15. То есть закон распределения имеет вид:

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Математическое ожидание найдем по формуле $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Получаем

M(X) = $-1\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}25+3\cdot 0{,}15$= -0,1+0,3+0,5+0,45=1,15.

Дисперсию найдем по формуле $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$, где $M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i$.

Получаем

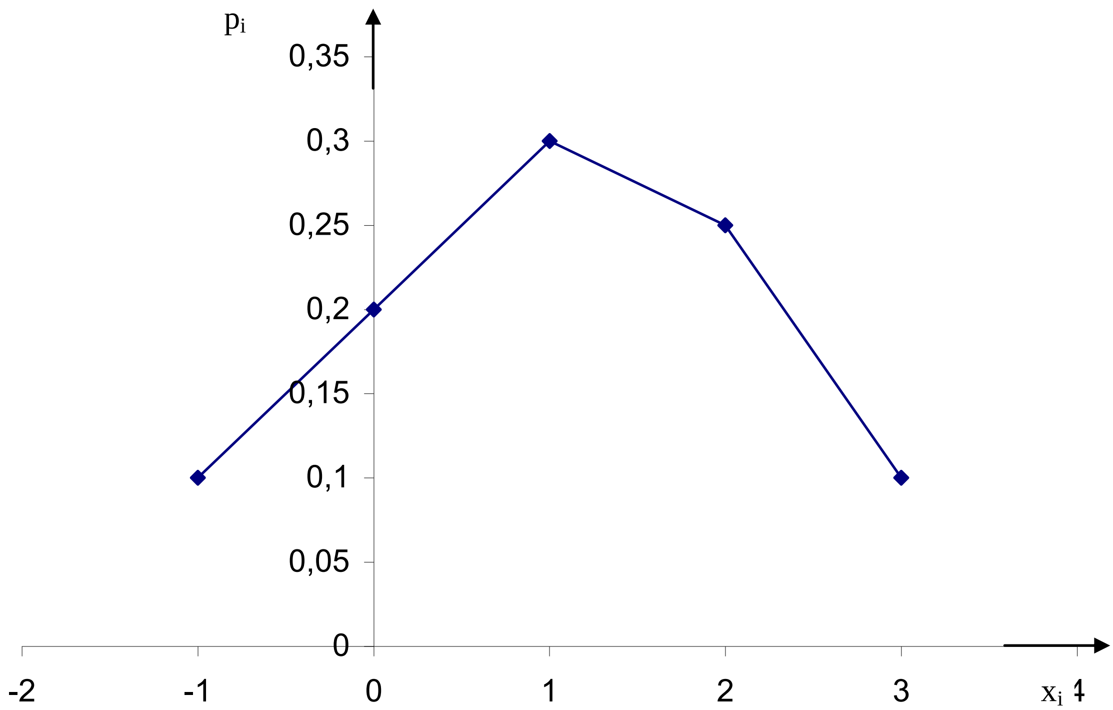
$M(X^2)=(-1)^2\cdot 0{,}1+0^2\cdot 0{,}2+1^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}25+3^2\cdot 0{,}15$=0,1+0,3+1,0+1,35=2,75.

Тогда D(X)=2,75-$1{,}15^2$=1,427.

Среднее квадратическое отклонение найдем по формуле $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$.

Получаем $\sigma_x=\sqrt{1.427}\approx 1{,}195$.

Построим многоугольник распределения.



Многоугольник распределения

Функция распределения (интегральная функция распределения) задается формулой $F(x)=P(X<x)$.

Будем задавать различные значения x и находить соответствующие значения функции.

Если $x\le -1$, то F(x)=0 (в том числе и при x= -1, так как F(-1)=P(X< -1)=0).

Если $-1<x\le 0$, то F(x)=P(X<0)=P(X= -1)=0,1.

Если $0<x\le 1$, то F(x)=P(X<1)=P(X= -1)+P(X=0)=0,1+0,2=0,3.

Если $1 < x \le 2$, то F(x)=P(X<2)=P(X= -1)+P(X=0)+P(X=1)=0,1+0,2+0,3=0,6.

Если $2 < x \le 3$, то
F(x)=P(X<3)=P(X= -1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)=0,1+0,2+0,3+0,25=0,85.
Если $x > 3$, то
F(x)= P(X= -1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)+P(X=4)=0,1+0,2+0,3+0,25+0,15=1.

Получаем: $F(x) = \begin{cases} 0,\ \textit{при}\ x \le -1, \\ 0,1,\ \textit{при}\ \ -1 < x \le 0, \\ 0,3,\ \textit{при}\ \ 0 < x \le 1, \\ 0,6,\ \textit{при}\ \ 1 < x \le 2, \\ 0,85, \textit{при}\ \ 2 < x \le 3, \\ 1, \textit{при}\ \ x > 3. \end{cases}$

Построим график функции распределения.

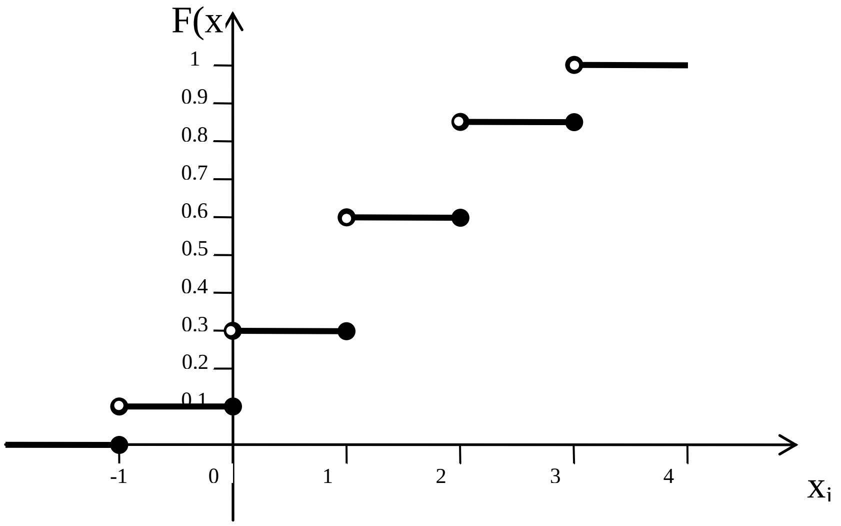


График функции распределения

Пример 5.
Непрерывная случайная величина задана функцией плотности распределения

$$P(x) = \begin{cases} 0 \quad \textit{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{2} \quad \textit{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 0 \quad \textit{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения $F(x)$, построить графики функций $p(x)$ *и* $F(x)$.

б) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

в) Найти вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[1;2]$.

Решение:

а) Функции $p(x)$ *и* $F(x)$ связаны соотношением $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt$.

Если $x \le 0$, *то* $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0$.

Если $0<x\le 2$, *то* $F(x)=\int_{-\infty}^{0} p(t)dt+\int_{0}^{x} p(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int_{0}^{x}\frac{t}{2}dt=0+\left.\frac{t^2}{4}\right|_0^x=\frac{x^2}{4}$.

Если $x>2$, *то* $F(x)=\int_{-\infty}^{0} p(t)dt+\int_{0}^{2} p(t)dt+\int_{2}^{x} p(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int_{0}^{2}\frac{t}{2}dt+\int_{2}^{x}0dt=\left.\frac{t^2}{4}\right|_0^2=1$.

Получаем: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

Построим график плотности распределения (Рисунок 8а) и график функции распределения.

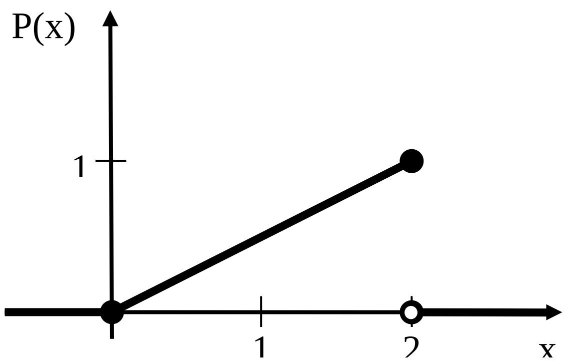


График функции $p(x)$

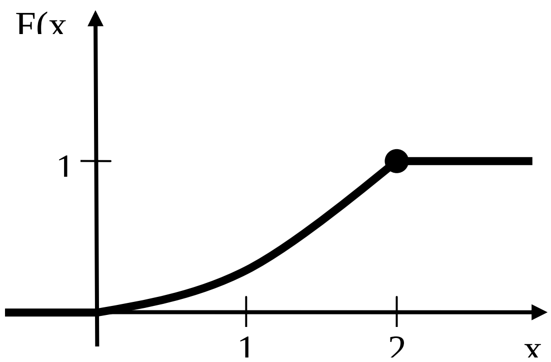


График функции $F(x)$

б) Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение найдем по формулам:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx,\quad D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx-(M(x))^2,\ \sigma(x)=\sqrt{D(x)}.$$

Получаем

$$M(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2} x\cdot\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{+\infty} 0dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^2dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};$$

$$D(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}x^2\cdot\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{+\infty}0dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^3dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{x^4}{8}\Bigg|_0^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{8}-\frac{16}{9}=\frac{2}{9};$$

$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

в) Вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[1;2]$. найдем по формуле $P(a\le X\le b)=\int_a^b p(x)dx$.

Получаем $P(1\le X\le 2)=\int_1^2\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}\Bigg|_1^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$

Ответ: $M(x)=\frac{4}{3}$; $D(x)=\frac{2}{9}$; $\sigma(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}$; $P(1\le X\le 2)=\frac{3}{4}.$

Пример 6.

Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 18, а вероятность ее попадания в интервал (16, 20) равна 0,98. Найти среднее квадратическое отклонение σ случайной величины.

Решение:

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ определяется через функцию Лапласа по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-M}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-M}{\sigma}\right).$$

По условию задачи вероятность $P(16<X<20)=0{,}98$.

Тогда

$$P(16<X<20)=\Phi\left(\frac{20-18}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{16-18}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=0{,}98$$

Так как функция Лапласа является нечетной функцией, для нее $\Phi(-z)=-\Phi(z)$.

$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\left(-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right)=2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0{,}98.$$

Откуда $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0{,}49$.

Найдем значение аргумента $z=\frac{2}{\sigma}$ функции Лапласа. Из таблицы значений функции Лапласа (см. Практика 3) получаем $z=2{,}33$. Значит, $\frac{2}{\sigma}=2{,}33$, а $\sigma=\frac{2}{2{,}33}=0{,}86$.

Ответ**:** 0,86.

Пример 7.

Выборка задана интервальным вариационным рядом

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	1-5	10
2	5-9	20
3	9-13	50
4	13-17	12
5	17-21	8

Построить гистограмму выборочной оценки плотности вероятности.

Решение:

Интервальный вариационный ряд графически изображают с помощью гистограммы. Для ее построения в прямоугольной системе координат на оси x откладывают отрезки частичных интервалов варьирования и на этих отрезках как на основаниях строят прямоугольники с высотами, равными отношению частот m_i или w_i относительных частот к длине интервалов варьирования h. Величины $\frac{m_i}{h}$ называют плотностью частоты, а $\frac{w_i}{h}$ называют плотностью относительной частоты.

Длина каждого интервала равна h =4.

Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{5} m_i = 10 + 20 + 50 + 12 + 8 = 100$.

Найдем значения относительных частот $w_i = \frac{m_i}{n}$ и занесем полученные результаты в таблицу.

Таблица значений относительных частот

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i	w_i
1	1-5	10	0,1
2	5-9	20	0,2
3	9-13	50	0,5
4	13-17	12	0,12
5	17-21	8	0,08

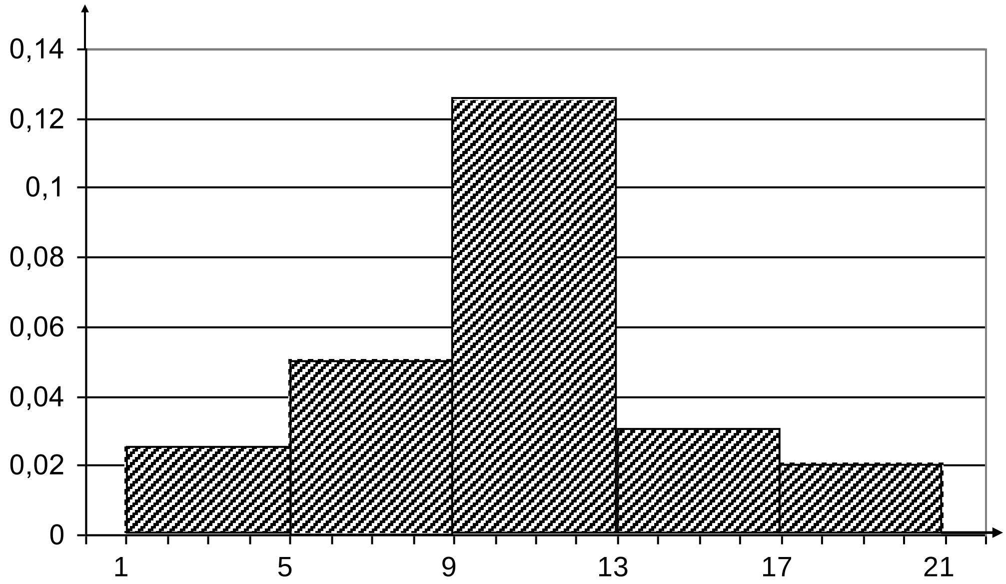
Определим плотности относительных частот $\frac{w_i}{h}$.

Таблица значений плотности относительных частот

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	$\frac{w_i}{h}$
1	1-5	$25 \cdot 10^{-3}$

2	5-9	$50 \cdot 10^{-3}$
3	9-13	$125 \cdot 10^{-3}$
4	13-17	$30 \cdot 10^{-3}$
5	17-21	$20 \cdot 10^{-3}$

По результатам второго и третьего столбцов таблицы построим гистограмму относительных частот.



Гистограмма относительных частот

Пример 8.

Выборка X объемом N=100 измерений задана таблицей:

x_i	0,2	1,4	2,6	3,8	5	6,2	7,4
m_i	5	13	25	25	19	10	3

где x_i - результаты измерений, m_i - частоты, с которыми встречаются значения x_i, $\sum_{i=1}^{7} x_i = 100$. По критерию χ^2 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение:

Нам необходимо проверить гипотезу о предполагаемом законе распределения. Выдвигаем нулевую гипотезу H_0 и ей конкурирующую H_1.

H_0: признак X имеет нормальный закон распределения.

H_1: признак X имеет закон распределения, отличный от нормального.

Нулевую гипотезу проверим с помощью критерия согласия χ^2 Пирсона (“хи-квадрат”): $\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(m_i^{\text{э}} - m_i^{\text{т}})^2}{m_i^{\text{т}}}$, где $m_i^{\text{э}}$ – эмпирические частоты, $m_i^{\text{т}}$ – теоретические частоты. Число степеней свободы равно $\text{k} = s - r - 1$, где s – число различных значений x_i дискретного признака X (у нас s равно 7), r – число параметров предполагаемого закона распределения (для нормального распределения $r = 2$), отсюда $k = 7-1-2=4$.

Из таблицы критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы k=4 находим $\chi^2_{\text{крит}}(0{,}05,\ 4)=9{,}49$.

Вычислим предварительно среднее выборочное и среднее квадратическое отклонение. Необходимые расчеты проведем в таблице (Таблица 19), перейдя к условным вариантам: $u_i = \dfrac{x_i - C}{h_x}$. У нас $h_x = 1{,}2$ - шаг выборки, С=3,8 – условная варианта (соответствует наибольшей частоте).

i	u_i	m_i	$u_i m_i$	$u_i^2 m_i$	$(u_i+1)^2 m_i$
1	-3	5	-15	45	20
2	-2	13	-26	52	13
3	-1	25	-25	25	0
4	0	25	0	0	25
5	1	19	19	19	76
6	2	10	20	40	90
7	3	9	9	27	48
$\sum$		100	-18	208	272

Проверка:

$$\sum (u_i+1)^2 m_i = \sum u_i^2 m_i + 2\sum u_i m_i + \sum m_i$$

272=272

Найдем теперь условные характеристики:

$$\overline{U} = \frac{\sum m_i u_i}{100} = -0{,}18,\quad D_u = \frac{\sum m_i u_i^2}{100} - (\overline{U})^2 = 2{,}048,\quad \sigma_u = \sqrt{D_u} = 1{,}43.$$

Возвращаясь к исходному вариационному ряду с помощью равенства $x_i = h_x u_i + C$ получаем: $\overline{x}_{xв} = h_x \overline{U} + C = 3{,}58$, $D_x = h_x^2 D_u = 2{,}949$, $\sigma_x = h_x \sigma_u = 1{,}72$.

Составим расчетную таблицу (Таблица 20) для нахождения $\chi^2_{\text{набл}}$, используя формулу $m_i^T = \dfrac{100 h_x}{\sigma_x} \cdot \varphi\left(\dfrac{x_i - \overline{x}_{xв}}{\sigma_x}\right)$, где $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Таблица 20 – Расчетная таблица

x_i	$z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_{xв}}{\sigma_x}$	$\varphi(z_i)$ (по таблице)	m_i^T	m_i	$m_i - m_i^T$	$\dfrac{(m_i - m_i^T)^2}{m_i^T}$
0,2	-1,97	0,06	4,18	5	0,81	0,158
1,4	-1,27	0,18	12,56	13	0,44	0,015

2,6	-0,57	0,34	23,72	25	1,27	0,069
3,8	0,13	0,40	27,91	25	-2,91	0,303
5	0,82	0,29	20,23	19	-1,23	0,075
6,2	1,52	0,13	9,07	10	0,93	0,095
7,4	2,22	0,03	2,09	3	0,91	0,393
$\sum$						**1,11**

Так как наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}$=1,11 попало в область принятия гипотезы ($\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}(\alpha,\ k)$, а у нас 1,11<9,49), то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, по данным наблюдения признак X имеет нормальный закон распределения с параметрами $a = 3{,}58$, $\sigma_x = 1{,}72$.

Ответ: гипотеза о нормальном распределении принимается.