

2.3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка в теории дифференциальных уравнений занимают важное место не только потому, что представляют собой простой и хорошо изученный тип уравнений, но и потому, что многие практические задачи физики, механики, техники и особенно электротехники приводят к решению этих уравнений.

Определение. Уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (2.9)$$

где y – искомая функция, а $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – непрерывные функции, называется **линейным дифференциальным уравнением второго порядка**.

Определение. Если $f(x) = 0$, то уравнение (2.9) принимает вид

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2.10)$$

и называется **линейным однородным** уравнением. Если же $f(x) \neq 0$, то уравнение (2.9) называется **линейным неоднородным** уравнением.

2.4 Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (2.10)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Теорема. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения линейного уравнения (2.10), то функция $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ при любых постоянных C_1 и C_2 также является решением уравнения.

2.5 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим уравнение (2.9)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

и соответствующее однородное уравнение (2.10)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Введём обозначения

$y_{он}$ – общее решение неоднородного линейного уравнения (2.9);

$y_{чн}$ – частное решение уравнения (2.9);

$y_{оо}$ – общее решения соответствующего однородного уравнения (2.10).

Теорема 1. Общим решением $y_{он}$ уравнения (2.9) является сумма его произвольного частного решения $y_{чн}$ и общего решения $y_{оо}$ соответствующего однородного уравнения, то есть

$$y_{он} = y_{чн} + y_{оо}. \quad (2.11)$$

Теорема 2. Если $y_{он}^1$ – решение уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$, а $y_{он}^2$ – решение уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$, то сумма $y_{он}^1 + y_{он}^2$ является решением уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$.

2.6 Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (2.12)$$

где p и q постоянные, называется **однородным линейным** дифференциальным уравнением (ОЛДУ) 2-го порядка с **постоянными коэффициентами**.

Решение уравнения (2.12) будем искать в виде $y = e^{kx}$, $k = const$.

Подставим $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ в (2.12)

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \text{ или } e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Определение. Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется **характеристическим** уравнением для (2.12).

Теорема 3.

1) Если k – действительный корень характеристического уравнения, то функция $y = e^{kx}$ является решением уравнения (2.12).

2) Если числа $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$, ($\beta \neq 0$) комплексные корни характеристического уравнения, то функции $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ являются решением уравнения (2.12).

Теорема 4.

1) Если корни характеристического уравнения действительные и различны $k_1 \neq k_2$, то общее решение уравнения (2.12) имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

2) Если корни характеристического уравнения действительные и равные $k_1 = k_2 = k$, то решение уравнения (2.12) имеет вид $y = e^{kx} (C_1 + C_2 x)$.

3) Если корни характеристического уравнения комплексные $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$, ($\beta \neq 0$) то общее решение уравнения (2.12) имеет вид $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Примеры. Решить дифференциальные уравнения:

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$;

3. $y'' - 10y' + 25y = 0$;

2. $y'' - 3y' + 4y = 0$.

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Решение. Для решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка (2.12), составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Данное уравнение является квадратным, корни этого уравнения $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ действительны и различны, поэтому общий интеграл данного уравнения будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2) $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 10k + 25 = 0 \text{ или } (k - 5)^2 = 0.$$

Корни этого уравнения $k_1 = k_2 = 5$ действительны и равны, поэтому общий интеграл данного уравнения будет

$$y = e^{5x} (C_1 + C_2 x).$$

Ответ. $y = e^{5x} (C_1 + C_2 x).$

3) $y'' - 3y' + 4y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k + 4 = 0.$$

Найдем $D = 9 - 16 = -7 = 7i^2$ и корни характеристического уравнения комплексные

$k_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$ и $k_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$, поэтому общее решение уравнения (2.12) имеет вид

$$y = e^{\frac{3}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x \right).$$

Ответ. $y = e^{\frac{3}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x \right).$

2.7 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (2.13)$$

где p и q постоянные, $f(x)$ - непрерывная функция, называется **неоднородным линейным** дифференциальным уравнением (НЛДУ) 2-го порядка с **постоянными коэффициентами**.

Общее решение уравнения (2.13), согласно теореме 1, представляет собой сумму $y_{он} = y_{чн} + y_{оо}.$

Для нахождения $y_{\text{чн}}$ рассмотрим различные виды правых частей уравнения (2.13).

3 Правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где α - известное число, $P_n(x)$ - многочлен степени n .

Тогда частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = Q_n(x) x^r e^{\alpha x},$$

где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а r - число корней характеристического уравнения равных α .

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}(x + 2)$.

Решение. Согласно теореме о структуре общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения $y_{\text{он}} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}}$. Найдем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$. Корни этого уравнения $k_1 = -1$, $k_2 = 3$ действительны и различны, поэтому общее решение данного уравнения будет

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Правая часть имеет вид $f(x) = e^{-x}(x + 2)$, то есть $\alpha = -1$, степень многочлена $n = 1$, $r = 1$ так как характеристическое уравнение имеет корень равный $\alpha = -1$. Поэтому частное решение уравнения имеет вид

$$y = (Ax + B)xe^{-x}.$$

Для нахождения коэффициентов найдем первую и вторую производные функции

$$\begin{array}{l|l} -3 & y_{\text{чн}} = (Ax + B)xe^{-x} = (Ax^2 + Bx)e^{-x} \\ -2 & y'_{\text{чн}} = (2Ax + B)e^{-x} - (Ax^2 + Bx)e^{-x} = (-Ax^2 + (2A - B)x + B)e^{-x} \\ 1 & y''_{\text{чн}} = (-2Ax + (2A - B))e^{-x} - (-Ax^2 + (2A - B)x + B)e^{-x} = (Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B)e^{-x} \end{array}$$

Подставим $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение и получим тождество

$$((-3A + 2A + A)x^2 + (-3B - 4A + 2B - 4A + B)x + (-2B + 2A - 2B))e^x = e^{-x}(x + 2),$$

$$-8Ax + (2A - 4B) = x + 2,$$

откуда

$$\begin{cases} -8A = 1 \\ 2A - 4B = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 8A = 1 \\ A - 2B = 1 \end{cases}, \begin{cases} A = -\frac{1}{8} \\ B = \frac{A-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{8} \\ B = -\frac{9}{16} \end{cases}$$

Таким образом,

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{16}(2x + 9)xe^{-x},$$

и общее решение имеет вид $y_{\text{он}} = -\frac{1}{16}(2x + 9)xe^{-x} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

Ответ. $y_{\text{он}} = -\frac{1}{16}(2x + 9)xe^{-x} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

4 Правая часть имеет вид $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$, где a, b, β - известные числа.

Тогда частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)x^r,$$

где A и B - неизвестные коэффициенты, а r - число корней характеристического уравнения равных $i\beta$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \sin 2x$.

Решение. Общее решения неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет вид $y_{\text{он}} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}}$. Найдём общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$. Корни этого уравнения комплексные $k_1 = -i$, $k_2 = i$, поэтому общее решение данного уравнения будет

$$y_{\text{оо}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Правая часть имеет вид $f(x) = \sin 2x$, то есть $\beta = 2$, $r = 0$ так как характеристическое уравнение не имеет корней равных $2i$. Поэтому

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x$$

Для нахождения коэффициентов найдем первую и вторую производные функции

$$\begin{array}{l|l} 1 & y_{\text{чн}} = A \cos 2x + B \sin 2x \\ 0 & y'_{\text{чн}} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x \\ 1 & y''_{\text{чн}} = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x \end{array}$$

Подставим $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение и получим тождество

$$-3A \cos 2x - 3B \sin 2x = \sin 2x,$$

откуда

$$\begin{cases} -3A = 0 \\ -3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Таким образом,

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{3} \sin 2x,$$

и общее решение имеет вид $y_{\text{он}} = -\frac{1}{3} \sin 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Ответ. $y_{\text{он}} = -\frac{1}{3} \sin 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

5 Правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x)$, где α, β - известные числа, $P_n(x)$ - многочлен степени n , $P_m(x)$ - многочлен степени m .

Тогда частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = (Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x) x^r e^{\alpha x},$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ - многочлены степени $s = \max\{n, m\}$, а r - число корней характеристического уравнения равных $\alpha + i\beta$.

Примеры. Найти общее решения уравнения

1) $y'' - y = 3e^{2x} \cos x$; 2) $y'' - 2y' + y = e^{-x} + \sin x$.

$$1) y'' - y = 3e^{2x} \cos x.$$

Решение. Общее решения неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет вид $y_{он} = y_{чн} + y_{оо}$. Найдем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y'' - y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$. Корни этого уравнения действительные и различные $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, поэтому общее решение данного уравнения будет

$$y_{оо} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Правая часть имеет вид $f(x) = 3e^{2x} \cos x$, то есть $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $r = 0$ так как характеристическое уравнение не имеет корень равных $2 + i$, многочлены $P_n(x) = 3$, $P_m(x) = 0$ первой степени и $s = \max\{n, m\} = 1$.

Поэтому

$$y_{чн} = (A \cos x + B \sin x) e^{2x}.$$

Для нахождения коэффициентов найдем первую и вторую производные функции

Подставим $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ в исходное уравнение и получим тождество

$$\left((2A + 4B) \cos x + (-4A + 2B) \sin x \right) e^{2x} = 3e^{2x} \cos x,$$

или

$$(2A + 4B) \cos x + (-4A + 2B) \sin x = 3 \cos x,$$

откуда

$$\begin{cases} 2A + 4B = 3 \\ -4A + 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10A = 3 \\ B = 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{10} \\ B = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Таким образом,

$$y_{чн} = (0,3 \cos x + 0,6 \sin x) e^{2x},$$

и общее решение имеет вид $y_{он} = (0,3 \cos x + 0,6 \sin x) e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Ответ. $y_{он} = (0,3 \cos x + 0,6 \sin x) e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

2) $y'' - 2y' + y = e^{-x} + \sin x$.

Решение. Согласно теореме 2 найдём общие решения уравнений

$$y'' - 2y' + y = e^{-x}, \quad y'' - 2y' + y = \sin x.$$

Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Составим его характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \quad \text{или} \quad (k-1)^2 = 0.$$

Корни этого уравнения $k_1 = k_2 = 1$ действительны и равны, поэтому общее решение данного уравнения будет

$$y_{оо} = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Правая часть первого уравнения имеет вид $f_1(x) = e^{-x}$, то есть $\alpha = -1$, степень многочлена $n = 0$, $r = 0$ так как характеристическое уравнение не имеет корней равных $\alpha = -1$. Поэтому

$$y_{чн}^1 = A e^{-x}.$$

Для нахождения коэффициентов найдём первую и вторую производные функции

$$\begin{array}{l|l} 1 & y_{чн}^1 = A e^{-x} \\ -2 & (y_{чн}^1)' = -A e^{-x} \\ 1 & (y_{чн}^1)'' = A e^{-x} \end{array}$$

Подставим y , y' , y'' в исходное уравнение и получим тождество

$$4A e^{-x} = e^{-x},$$

откуда

$$A = \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$y_{\text{чн}}^1 = \frac{1}{4} e^{-x}.$$

Правая часть второго уравнения имеет вид $f_2(x) = \sin x$, то есть $\beta = 1$, $r = 0$ так как характеристическое уравнение не имеет корней равных i . Поэтому

$$y_{\text{чн}}^2 = A \cos x + B \sin x.$$

Для нахождения коэффициентов найдём первую и вторую производные функции

$$\begin{array}{l|l} 1 & y_{\text{чн}}^2 = A \cos x + B \sin x \\ -2 & (y_{\text{чн}}^2)' = -A \sin x + B \cos x \\ 1 & (y_{\text{чн}}^2)'' = -A \cos x - B \sin x \end{array}$$

Подставим y , y' , y'' в исходное уравнение и получим тождество

$$-2B \cos x + 2A \sin x = \sin x,$$

откуда

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Таким образом,

$$y_{\text{чн}}^2 = \frac{1}{2} \cos x,$$

и общее решение имеет вид $y_{\text{он}} = \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} \cos x + 2e^x (C_1 + C_2 x)$.