

2.2 Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим три частных случая, когда решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$ с помощью замены переменной сводится к решению уравнения первого порядка. Такое преобразование уравнения $y'' = f(x, y, y')$ называется *понижением порядка*.

1. Уравнение вида

$$y'' = f(x) \text{ или } F(x, y'') = 0. \quad (2.4)$$

Введём новую функцию

$$z(x) = y' \Rightarrow z'(x) = y'' \Rightarrow z'(x) = f(x) \Rightarrow z(x) = \int f(x) dx + C_1.$$

$$y' = \int f(x) dx + C_1 \Rightarrow y = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Пример. Проинтегрировать уравнение $y'' = x$.

Решение. Найдём $y' = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1$ и далее $y = \int \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1 \right) dx = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$.

Ответ. $y = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$.

2. Уравнение вида

$$y'' = f(x, y') \text{ или } F(x, y', y'') = 0. \quad (2.5)$$

Введём новую функцию

$$z(x) = y' \Rightarrow z'(x) = y'' \Rightarrow z'(x) = f(x, z) \Rightarrow z(x) = \varphi(x, C_1).$$

$$y' = \varphi(x, C_1) \Rightarrow y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2,$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Замечание. Уравнение вида

$$F(y'') = 0 \quad (2.6)$$

является частным случаем уравнения (2.5).

Пример. Проинтегрировать уравнение $xy'' - y' = 0$.

Решение. Введём новую функцию $z(x) = y' \Rightarrow z'(x) = y''$ и получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$xz' - z = 0,$$

с разделяющимися переменными.

Имеем

$$x \frac{dz}{dx} - z = 0,$$

откуда разделяя переменные получим

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя его, найдем

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = \ln|x| + C_1 \text{ или } \ln|z| = \ln|C_2 x|,$$

то есть

$$z = C_2 x.$$

Подставим y' вместо z

$$y' = C_2 x.$$

$$y = \int C_2 x dx = \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 = C_4 x^2 + C_3.$$

Ответ. $y = C_4 x^2 + C_3$.

3. Уравнение вида (частный случай (2.5))

$$y'' = f(y, y') \text{ или } F(y, y', y'') = 0. \quad (2.7)$$

Введём новую функцию

$$z(y) = y' \Rightarrow y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z(y) \Rightarrow z \frac{dz}{dy} = f(y, z) \Rightarrow z = \varphi(y, C_1) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1).$$

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2,$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Пример. Проинтегрировать уравнение $yy'' = y'^2$.

Решение. Введём новую функцию

$$z(y) = y' \Rightarrow y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z(y),$$

тогда уравнение примет вид

$$z \frac{dz}{dy} y = z^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя получим

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dy}{y},$$

$$\ln|z| = \ln|y| + C_1 \text{ или } \ln|z| = \ln|C_2 y|,$$

то есть

$$z = C_2 y \text{ или } y' = C_2 y.$$

Представим y' как отношение дифференциалов и разделим переменные

$$\frac{dy}{dx} = C_2 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_2 dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int C_2 dx \Rightarrow \ln|y| = C_2 x + C_3 \Rightarrow y = e^{C_2 x + C_3} = C_4 e^{C_2 x}.$$

Ответ. $y = C_4 e^{C_2 x}$.

Замечание. Уравнения вида

$$y'' = f(y) \text{ или } F(y, y'') = 0 \text{ и } y'' = f(y') \text{ или } F(y', y'') = 0. \quad (2.8)$$

является частным случаем уравнения (2.7).

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = 128y^3$ при начальных условиях $y(0) = 1, y'(0) = 8$.

Решение. Введём новую функцию

$$z(y) = y' \Rightarrow y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z(y),$$

тогда уравнение примет вид

$$z \frac{dz}{dy} = 128y^3 \text{ или } z dz = 128y^3 dy.$$

Интегрируя получим

$$\int z dz = \int 128y^3 dy \Rightarrow \frac{1}{2} z^2 = \frac{128}{4} y^4 \Rightarrow z^2 = 64y^4 + C_1 \Rightarrow (y')^2 = 64y^4 + C_1.$$

Найдем C_1 используя начальные условия $y(0) = 1, y'(0) = 8$

$$(8)^2 = 64 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Таким образом, $(y')^2 = 64y^4 \Rightarrow y' = 8y^2$.

Представим y' как отношение дифференциалов и разделим переменные

$$\frac{dy}{dx} = 8y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 8dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int 8dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = 8x + C_2 \Rightarrow y = -\frac{1}{8x + C_2}.$$

Используя начальные условия $y(0) = 1$ найдем C_2

$$1 = -\frac{1}{C_2} \Rightarrow C_2 = -1.$$

Окончательно получим частное решение $y = \frac{1}{1-8x}$.

Ответ. $y = \frac{1}{1-8x}$.