

2 Дифференциальные уравнения второго порядка

2.1. Основные понятия

Определение. Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (2.1)$$

где x – независимая переменная; y – искомая функция; y' и y'' – её производные, называется **дифференциальным уравнением второго порядка**.

Если уравнение можно разрешить, относительно второй производной, то его записывают в виде:

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (2.2)$$

Определение. *Решением уравнения* (2.1) или (2.2) называется функция $y = \varphi(x, C)$, $x \in (a, b)$ которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Начальные условия для дифференциального уравнения второго порядка имеют вид

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad \text{или} \quad y = y_0, \quad y' = y'_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (2.3)$$

Теорема (теорема Коши). Если функция $f(x, y, y')$ и её частные производные $f_y(x, y, y')$ и $f_{y'}(x, y, y')$ определены и непрерывны в некоторой области D пространства переменных $(x; y; y')$, то какова бы, ни была внутренняя точка $(x_0; y_0; y'_0)$ области D , существует единственное решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y = y_0, \quad y' = y'_0$ при $x = x_0$.

Определение. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2 , называется **общим решением** уравнения в некоторой области D , если она является решением уравнения при любых значениях постоянных, и если для данных начальных условий существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0, \quad C_2 = C_2^0$ такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет заданным начальным условиям.

Определение. Общее решение в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ называется **общим интегралом**.

Определение. Решение дифференциального уравнения $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$,
полученное из общего решения при определённых значениях постоянных $C_1 = C_1^0$,
 $C_2 = C_2^0$, называется его *частным решением*.