

1.3 Линейные уравнения

Определение. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1.5)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции, называется **линейным** дифференциальным уравнением (ЛДУ) первого порядка.

Определение. Если $q(x) = 0$, то уравнение (1.5) называется **линейным однородным** уравнением. Если $q(x) \neq 0$, то (1.5) называется **линейным неоднородным** уравнением.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y' + p(x)y = 0, \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) является уравнением с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Проинтегрируем обе части последнего уравнения

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C_1 \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C,$$

$$\ln|y| - \ln C = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln \frac{y}{C} = -\int p(x)dx \Rightarrow \frac{y}{C} = e^{-\int p(x)dx},$$

и получим общее решение уравнения (1.6)

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Решение $y = 0$, получается из общего при $C = 0$.

Свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений (ОЛДУ)

- 1) Если y_1 - решение уравнения (1.6), то Cy_1 также является его решением, где C - произвольная постоянная.
- 2) Если y_1 и y_2 - некоторые частные решения уравнения (1.6), то функция $\alpha y_1 + \beta y_2$ также является его решением, где α, β - произвольные постоянные.

3) Если y_1 - некоторое частное решение уравнения (1.6), то Cy_1 есть общее его решение, где C - произвольная постоянная.

Теорема. Если y_2 - частное решение линейного неоднородного уравнения (1.5), а y_1 - решение соответствующего однородного уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, то $y_1 + y_2$ также является общим решением линейного неоднородного уравнения.

Метод Бернулли решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений (НЛДУ)

Решение НЛДУ 1-го порядка (1.6) ищем в виде

$$y = u(x)v(x) = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'.$$

Уравнение (1.6) примет вид

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \text{ или } \underbrace{v(u' + p(x)u)}_0 + \underbrace{uv'}_{q(x)} = q(x).$$

Получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0 \\ uv' = q(x), \end{cases}$$

1) Первое уравнение системы $u' + p(x)u = 0$ или $\frac{du}{dx} + p(x)u = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными.

Умножим обе части уравнения на $\frac{dx}{u} \neq 0$: $\frac{du}{u} + p(x)dx = 0$ или $\frac{du}{u} = -p(x)dx$.

Проинтегрировав последнее равенство получаем:

$$\int \frac{du}{u} = -\int p(x)dx + C \Rightarrow \ln|u| = -\int p(x)dx + C.$$

Положим $C = 0$, тогда $\ln|u| = -\int p(x)dx \Rightarrow u = e^{-\int p(x)dx}$.

2) Второе уравнение системы также является уравнением с разделяющимися переменными

$$uv' = q(x) \text{ или } u \frac{dv}{dx} = q(x), \text{ или } e^{-\int p(x)dx} dv = q(x)dx.$$

Разделяя переменные, получим

$$dv = q(x)e^{\int p(x)dx} dx.$$

Далее интегрируя

$$v = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Таким образом нашли общее решение уравнения (1.6)

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

Пример. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, методом Бернулли.

Решение. Представим решение уравнения в виде $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – неизвестные функции от x , тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда уравнение принимает вид

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \operatorname{tg} x \cdot u \cdot v = \frac{1}{\cos x},$$

или

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + \operatorname{tg} x \cdot v) = \frac{1}{\cos x}.$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, то есть решим первое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $v' + v \cdot \operatorname{tg} x = 0$.

$$\text{Отсюда } \frac{dv}{dx} + v \cdot \operatorname{tg} x = 0, \text{ то есть } \frac{dv}{v} + \operatorname{tg} x \cdot dx = 0.$$

Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dv}{v} + \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x} = 0 \text{ или } \int \frac{dv}{v} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = 0.$$

Получим $\ln|v| - \ln|\cos x| = \ln|C|$, $C \neq 0$, откуда $v = C \cdot \cos x$, $C \neq 0$.

Поскольку нам достаточно какого-нибудь одного ненулевого решения, то возьмем $v = \cos x$ ($C = 1$). Подставляя $v = \cos x$ в уравнение, получим второе дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, из которого найдем функцию $u(x)$:

$$u' \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x}, \text{ т.е. } du = \frac{dx}{\cos^2 x}, \text{ и, следовательно } u = \operatorname{tg} x + C.$$

Таким образом, $y = u \cdot v = (\operatorname{tg} x + C) \cdot \cos x$ или $y = C \cdot \cos x + \sin x$ – общее решение исходного уравнения.

Найдем значение постоянной C , при которой частное решение удовлетворяет начальному условию $y = 1$ при $x = 0$: $1 = C \cdot \cos 0 + \sin 0$.

Следовательно, $1 = C$, и частное решение запишется в виде $y = \cos x + \sin x$.

Ответ: $y = \cos x + \sin x$.