

1.2 Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad (1.3)$$

называется уравнением с *разделенными переменными*.

Отыскание решения. Заметим, что

$$d\left(\int P(x)dx\right) = P(x)dx \text{ и } d\left(\int Q(y)dy\right) = Q(y)dy.$$

Подставим в уравнение (1.3)

$$d\left(\int P(x)dx\right) + d\left(\int Q(y)dy\right) = 0.$$

Используя свойства дифференциала суммы, получим

$$d\left(\int P(x)dx + \int Q(y)dy\right) = 0.$$

Следовательно

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C - \text{общий интеграл, где } C = \text{const}.$$

Пример. Проинтегрировать уравнение $x dx + y dy = 0$.

Решение. Так как уравнение является уравнением с разделёнными переменными, то проинтегрируем обе части уравнения

$$\int x dx + \int y dy = C_1 \text{ или } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Запишем общий интеграл в виде $x^2 + y^2 = C$.

Ответ: $x^2 + y^2 = C$.

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$P(x)M(y)dx + N(x)Q(y)dy = 0 \quad (1.4)$$

называется уравнением с *разделяющимися переменными*.

Для отыскания решения разделим уравнение (1.4) на $N(x)M(y) \neq 0$. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{P(x)}{N(x)}dx + \frac{Q(y)}{M(y)}dy = 0.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделёнными переменными.

Замечание. При делении на $N(x)M(y) \neq 0$ могла произойти потеря решения уравнения (1.4), то есть таких $x = x_0$, $y = y_0$, при которых $N(x_0) = 0$ и $M(y_0) = 0$. Поэтому непосредственной подстановкой в уравнение проверяют, являются ли $x = x_0$, $y = y_0$ его решениями.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на произведение $(1+x^2)(1+e^y)$ и получим уравнение $\frac{e^y}{1+e^y}dy - \frac{2x}{1+x^2}dx = 0$ с разделёнными переменными. Проинтегрируем уравнение

$$\int \frac{e^y}{1+e^y} dy - \int \frac{2x}{1+x^2} dx = C_1$$

или

$$\int \frac{d(e^y)}{1+e^y} - \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = C_1,$$

$$\ln(1+e^y) - \ln(1+x^2) = C_1.$$

После преобразований получим общий интеграл

$$\ln \frac{1+e^y}{1+x^2} = \ln C$$

$$\frac{1+e^y}{1+x^2} = C \text{ или } 1+e^y = C(1+x^2).$$

Ответ: $1+e^y = C(1+x^2)$.