

1 Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1 Основные понятия

Дифференциальные уравнения - это уравнения, в которые неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала.

Дифференциальные уравнения можно разделить на **обыкновенные** дифференциальные уравнения, в которых неизвестные функции являются функциями одной переменной, и на дифференциальные уравнения в **частных производных**, в которых неизвестные функции являются функциями двух и большего числа переменных.

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производную.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.1)$$

Если уравнение можно разрешить, относительно y' , то его записывают в виде

$$y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

где x – независимая переменная; y – искомая функция; y' – её производная.

Замечание. Так как производную можно представить в виде отношения дифференциалов, то уравнение может содержать не производную, а дифференциалы неизвестной функции и независимой переменной.

Определение. *Решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x)$, $x \in D$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Пример. Функция $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ является решением уравнения $y' = 2x$, так как при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Можно заметить, что дифференциальное уравнение будет иметь бесконечное множество решений $y = x^2 + C$, $C = \text{const}$.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0 , т.е. $y = y_0$ называется **начальным условием**. Начальное условие записывается в виде $y(x_0) = y_0$ или $y|_{x=x_0} = y_0$.

Определение. График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения носит название **интегрирования** дифференциального уравнения.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях уравнение имеет решение, дает теорема Коши, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения и является основной в теории дифференциальных уравнений.

Теорема (Коши). Пусть задано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и начальное условие $y(x_0) = y_0$. Если функция $f(x, y)$ и ее частная, производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области D , то какова бы ни была внутренняя точка $(x_0; y_0)$ области D , в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Геометрически теорема утверждает, что через каждую внутреннюю точку $(x_0; y_0)$ области D проходит единственная интегральная кривая.

Очевидно, что в области D уравнение имеет бесконечное число различных решений.

Отыскание решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям называется задачей Коши. С геометрической точки зрения решить задачу Коши – значит из множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через заданную точку плоскости.

Точки плоскости, через которые либо проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одной интегральной кривой, называются **особыми точками** данного уравнения.

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в некоторой области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от x и произвольной постоянной C , если она является решением уравнения при любом значении постоянной C , и при любых начальных условиях.

Определение. Общее решение дифференциального уравнения, представленного в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$ называется его **общим интегралом**.

Определение. Решение дифференциального уравнения $y = \varphi(x, C_0)$, полученное из общего решения при определенном значении постоянной C , называется его **частным решением**.

Геометрически общее решение $y = \varphi(x, C)$ дифференциального уравнения, представляет собой **семейство интегральных кривых** на плоскости Oxy , зависящее от одной произвольной постоянной C , а частное решение $y = \varphi(x, C_0)$ - одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку $(x_0; y_0)$.

Пример. Проверьте, является ли функция $y = \frac{1}{7-3x}$ решением дифференциального уравнения $y' = 3y^2$.

Решение. Найдем $y' = \left(\frac{1}{7-3x} \right)' = \frac{3}{(7-3x)^2}$ и подставим в дифференциальное уравнение

$$\frac{3}{(7-3x)^2} \equiv \frac{3}{(7-3x)^2},$$

то есть функция удовлетворяет данному уравнению и, следовательно является его решением.