Содержание

Функции нескольких переменных

Основные понятия

Определение. Отображение f некоторого подмножества D двумерного евклидова пространства $\mathbf{R}^2$ во множество $\mathbf{R}$ действительных чисел называют ***действительной функцией 2-х действительных переменных***.

Записывают следующим образом: $z = f(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т.п.

Символом $f(a,b)$ обозначают значение функции $z = f(x, y)$, которое соответствует системе значений $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$.

Аналогично определяются функции трёх и более переменных: $u = f(x, y, z)$, $v = f(x, y, z, u)$.

Функции нескольких переменных задаются явным аналитическим способом, например $z = 2x^2 + 3y$, $u = \dfrac{x+y}{z^2+1}$, $w = e^{x\sin(x+y)}$. Также встречается неявное задание функций, например, уравнение $3z - x - y - 5 = 0$ задаёт неявно функцию $z = \dfrac{x+y+5}{3}$.

Определение. Множество пар значений, которые могут принимать аргументы x и y, называется ***областью определения (задания)*** функции $z = f(x, y)$.

Область определения функции $z = f(x, y)$ представляет собой либо часть плоскости, ограниченную замкнутой кривой, причём точки этой кривой принадлежат или не принадлежат области определения, либо всю плоскость, либо совокупность нескольких частей плоскостей xoy.

Геометрическое изображение функции $z = f(x, y)$ в ПСК является поверхность.

Пример. Найти области определения функций:

1. $z = 2x^2 + 3y$
2. $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Непрерывность функции двух переменных

Пусть точка $P_0\left(x_0, y_0\right)$ принадлежит области определения функции $z = f(x, y)$.

Определение. ***Полным приращением*** функции $z = f(x, y)$ в данной точке P_0 называется разность

$$\Delta z = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right), \tag{1}$$

где Δx и Δy – приращения аргументов.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной в точке*** $\left(x_0, y_0\right)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Обозначив $x_0 + \Delta x$ через x и $y_0 + \Delta y$ через y, мы можем условие непрерывности функции $z = f(x, y)$ записать в виде $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left[f(x, y) - f\left(x_0, y_0\right)\right] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f\left(x_0, y_0\right)$.

Последнее означает, что функция непрерывна в точке $\left(x_0, y_0\right)$, если ее предел равен значению функции в предельной точке.

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке области, называется ***непрерывной*** в этой области.

Замечание. Непрерывные функции двух независимых переменных обладают теми же основными свойствами, что и непрерывные функции одной независимой переменной.

Определение. Точка в плоскости *Oxy*, в которой не выполняется условие непрерывности функции, называется точкой ***разрыва*** функции.

Замечание. Точки разрыва функции двух переменных могут образовывать целые линии.

Частные производные функций нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$. Придадим переменной x в точке $M(x, y)$ произвольное приращение Δx, оставляя значение переменной y неизменным. Получим $M_1(x+\Delta x, y)$, принадлежащую окрестности точки $M\left(x, y\right)$.

Определение. Разность

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y), \tag{2}$$

называется ***частным приращением*** функции по переменной x в точке $M\left(x, y\right)$.

Аналогично определяется ***частное приращение*** функции по переменной y

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y), \tag{3}$$

Замечание. Аналогично определяется частное приращение функции $u = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ в точке $M\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ по переменной x_k, $k = \overline{1, n}$

$$\Delta_{x_k} u = f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, \ldots x_n\right) - f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots x_n\right).$$

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ $\left(\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}\right)$, то он называется частной производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M\left(x, y\right)$ по переменной x (по переменной y) и обозначается одним из следующих символов:

$$z'_x, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \left(z'_y, f'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}. \end{aligned} \tag{4}$$

Замечания.

1. Из определения следует, что частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y. Поэтому частные производные вычисляются по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной.

2. Аналогично определяются частные производные функции $u=f\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)$ в точке $M\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)$ по переменной x_k, $k=\overline{1,n}$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k}.$$

Примеры. Найти частные производные функций

1. $z=x^2-2xy+y^3$.

2. $z=x^2\sin xy$.

3. $u=xyz-\dfrac{x}{yz}$.

Решение.

1. $z=x^2-2xy+y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2-2xy+y^3\right)'_x=\left(x^2\right)'_x-\left(2xy\right)'_x+\left(y^3\right)'_x=2x-2y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2-2xy+y^3\right)'_y=\left(x^2\right)'_y-\left(2xy\right)'_y+\left(y^3\right)'_y=-2x+3y^2.$$

2. $z=x^2\sin xy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2\sin xy\right)'_x=\left(x^2\right)'_x\cdot\sin xy+x^2\cdot\left(\sin xy\right)'_x=2x\sin xy+x^2\cos xy\cdot\left(xy\right)'_x=2x\sin xy+x^2y\cos xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2\sin xy\right)'_y=x^2\cdot\left(\sin xy\right)'_y=x^2\cos xy\cdot\left(xy\right)'_y=x^3\cos xy.$$

Геометрически частная производная $f'_x\left(x_0,y_0\right)$ $\left(f'_y\left(x_0,y_0\right)\right)$ есть угловой коэффициент относительно оси Ox (Oy), касательной в точке $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$ к сечению поверхности $z=f(x,y)$ плоскостью $y=y_0$ $\left(x=x_0\right)$.

Физический смысл частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M)$ – скорость изменения функции в точке $M\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)$ в направлении оси Ox_k $k=\overline{1,n}$.

Понятие дифференцируемости функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точке $M(x, y)$.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x, y)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где A и B – некоторые не зависящие от Δx и Δy числа, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ функции.

Необходимые условия дифференцируемости

Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она непрерывна в этой точке.

Теорема 2. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема точке $M(x, y)$, то она имеет в этой точке частные производные, причем $f'_x(x, y) = A,\ f'_y(x, y) = B$.

Замечание. Обратные утверждения к теоремам 1 и 2 неверны.

Производные сложных функций

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $z = f(x, y)$ является сложной функцией независимой переменной t, а переменные x и y – промежуточные переменные.

Теорема. Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M[x(t), y(t)]$, то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$, также дифференцируема в точке t. Причем производная вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (5)$$

Пример. Найти $\frac{dz}{dt}$ функции $z=x\sin y$, $x=1+3t$, $y=\sqrt{1+t^2}$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x\sin y\right)'_x=\sin y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x\sin y\right)'_y=x\cos y$; $\frac{dx}{dt}=\left(1+3t\right)'_t=3$;

$$\frac{dy}{dt}=\left(\sqrt{1+t^2}\right)'_t=\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\cdot\left(1+t^2\right)'_t=\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$\frac{dz}{dt}=3\sin y+x\cos y\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=3\sin\sqrt{1+t^2}+\frac{t\left(1+3t\right)\cos\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Если $z=f(x,y)$, где $y=\varphi(x)$, то $z=f\left(x,\varphi(x)\right)$ – сложная функция x. На основании формулы (4), в которой роль t играет теперь x, получим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

а так как $\frac{dx}{dx}=1$, то

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (6)$$

Пример. Найти $\frac{dz}{dx}$ функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $y=\cos 2x$.

Рассмотрим более общий случай.

Пусть $z=f(x,y)$ – функция двух переменных x и y, которые, в свою очередь, зависят от двух (или большего числа) независимых переменных: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. Тогда функция $z=f\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ является сложной функцией независимых переменных u и v, а переменные x и y – промежуточные.

Теорема. Если функции $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$ дифференцируемы в точке (u,v), а функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $\left(x(u,v),y(u,v)\right)$, то сложная функция $z=f\left(x(u,v),y(u,v)\right)$, также дифференцируема в точке (u,v).

Причём, ее частные производные в этой точке находятся по формулам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \qquad (7)$$

Пример. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ функции $z = e^{x^2+y^2}$, где $x = 2u - v$, $y = 3v - u$.

Дифференциал функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, тогда ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$, где A и B – некоторые не зависящие от Δx и Δy числа, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ функции.

Определение. ***Дифференциалом*** dz дифференцируемой в точке $M(x, y)$ функции $z = f(x, y)$ называется линейная относительно приращений Δx и Δy часть полного приращения этой функции в точке $M(x, y)$, т.е. $dz = A\Delta x + B\Delta y$ или

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy. \qquad (8)$$

Пример. Найти дифференциал функции $z = \ln\left(x + 5y^2\right)$ в точке $M(1;1)$.

Частные производные высших порядков

Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ называют частными производными первого порядка.

Их можно рассматривать как функции от переменных x и y. Эти функции могут иметь частные производные, которые называют ***частными производными второго порядка***. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{y^2}(x,y).$$

Частные производные второго порядка вида $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ называются ***смешанными частными производными***.

Замечание. Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т.д. порядков, которые называют ***частными производными высших порядков***.

Примеры. Найти частные производные 2-го порядка.

1. $z=x^4+4x^2y^3+7xy+1.$
2. $z=\sin x\cos y$.
3. $u=\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

В данных примерах смешанные частные производные равны.

Теорема. Если производные $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ существуют в некоторой окрестности точки $M(x,y)$ и непрерывны в самой точке $M(x,y)$, то они равны между собой в этой точке, т.е. имеет место равенство $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

Дифференциалы высших порядков

Будем называть dz дифференциалом первого порядка.

Пусть функции $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ дифференцируемы в точке $M(x,y)$.

Определение. Дифференциал $d(dz)$ от дифференциала dz в точке $M(x,y)$ называется ***дифференциалом второго порядка*** функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ и обозначается d^2z.

Если x и y – независимые переменные и функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Имеет место символические формулы

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z,\qquad d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

$$d^mu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u.$$

Примеры:

1. Найти d^2z функции $z=x^2+y^2-xy-2x+y+7$.

2. Найти d^3z функции $z=\frac{y}{x}$.

3. Найти d^2u функции $u=e^{xyz}$.

Дифференцирование неявной функции

Определение. Функция $z=f(x,y)$ называется ***неявной***, если она задается уравнением

$$F(x,y,z)=0, \tag{9}$$

неразрешенным относительно z.

Для того, чтобы найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции z, заданной неявно, подставим в уравнение (1) вместо z функцию $f(x,y)$

$$F(x,y,f(x,y))=0.$$

Найдем частные производные от левой и правой частей полученного равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

откуда найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Замечания. 1) Частные производные функции $u=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, заданной неявно уравнением $F\left(x_1,x_2,...,x_n,u\right)=0$ находятся по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{F'_{x_k}}{F'_u},\ k=\overline{1,n}. \tag{10}$$

2) Частные производные второго порядка находятся путем дифференцирования по переменной x_m $m=\left(\overline{1,n}\right)$ правой части равенства (2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m}=\frac{\partial}{\partial x_m}\left(-\frac{F'_{x_k}}{F'_u}\right).$$

Аналогично вычисляются частные производные более высокого порядка.