2 Определенный интеграл

2.1 Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Задача 1. Задача о работе переменной силы

а) Пусть материальная точка под действием постоянной силы F перемещается по направлению этой силы. Если проделанный путь равен S, то работа этой силы вычисляется по формуле $A = F \cdot S$.

б) Пусть материальная точка движется по координатной оси Ox из точки $A(a)$ в точку $B(b)$ $(b > a)$ под действием переменной силы, направленной по оси Ox и является функцией от x, то есть $F = F(x)$. Для нахождения работы в этом случае:

1. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Разность $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ – длина частичного отрезка. Число $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ назовем ***параметром разбиения***.

2. В каждом разбиении выберем точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$ (рисунок 2.1). Вычислим $F(\xi_k)$. Если считать силу $F(\xi_k)$ постоянной на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, то произведение $F(\xi_k) \cdot \Delta x_k \overset{обозн}{=} \Delta A_k$ даст примерное значение работы по перемещению материальной точки из точки x_{k-1} до точки x_k.

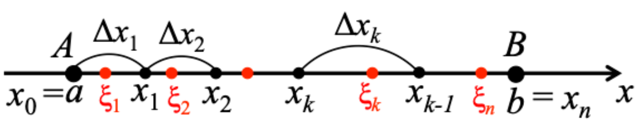

Рисунок 2.1

3. Примерное значение работы по перемещению материальной точки из $A(a)$ в $B(b)$ равно $\Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots + \Delta A_k + \ldots + A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

4. Если число разбиений отрезка $\left[a,b\right]$ увеличивать , то есть $d \to 0$, то значение работы будет более точным. Поэтому

$$A = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} F\left(\xi_k\right)\cdot \Delta x_k \; . \qquad (2.1)$$

Задача 2. О площади криволинейной трапеции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $\left[a,b\right]$.

Определение. Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$ прямыми $x = a, x = b$ и осью *Ox* называется ***криволинейной трапецией*** (рисунок 2.2).

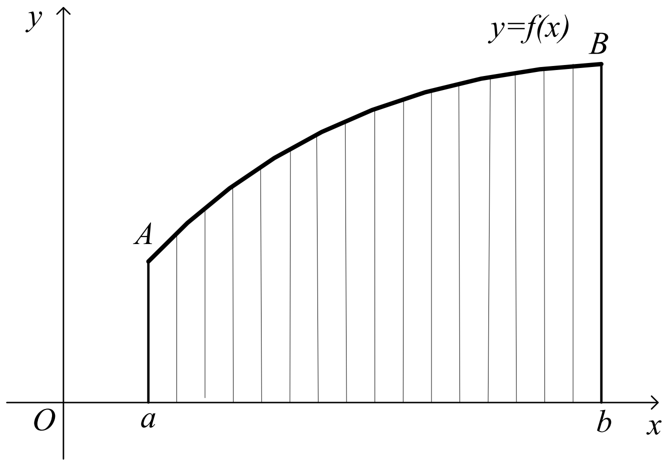

Рисунок 2.2 – Криволинейная трапеция

Найдем площадь этой фигуры.

1. Разобьем отрезок $\left[a,b\right]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Разность $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$. Число $d = \max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ назовем параметром разбиения.

2. В каждом разбиении выберем точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $\xi_k \in \left[x_{k-1}, x_k\right]$, $k = \overline{1,n}$, то есть зададим разбиение с отмеченными точками. Вычислим $f\left(\xi_k\right)$ и найдем $f\left(\xi_k\right)\cdot\Delta x_k \overset{обозн}{=} \Delta S_k$ – площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f\left(\xi_k\right)$.

3. В результате получим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, площадь которой равна

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_k + \ldots + S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \cdot \Delta x_k .$$

4. Если число разбиений отрезка $\left[a,b\right]$ увеличивать , то есть $d \to 0$, то площадь ступенчатой фигуры будет все меньше отличатся от площади криволинейной трапеции.

Поэтому

$$S_{kp.mp.} = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \cdot \Delta x_k . \qquad (2.2)$$

2.2 Понятие определенного интеграла

Конструктивное определение определенного интеграла. Пусть функция $y = f\left(x\right)$ определена на $\left[a,b\right]$.

1. Разобьем отрезок $\left[a,b\right]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Обозначим разность $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$. Число $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ назовем параметром разбиения.

2. В каждом разбиении выберем точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $\xi_k \in \left[x_{k-1}, x_k\right]$, $k = \overline{1,n}$. Вычислим $f\left(\xi_k\right)$ и найдем $f\left(\xi_k\right) \cdot \Delta x_k$.

3. Составим суммы $S\left(f\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \cdot \Delta x_k$, которые принято называть ***интегральными суммами*** или ***суммами Римана***.

4. Рассмотрим множество интегральных сумм для таких разбиений, у которых параметр d стремится к нулю.

Если существует конечный предел интегральных сумм при $d \to 0$, который не зависит от способа разбиения отрезка $\left[a,b\right]$ на части и выбора точек ξ_k, то его называют ***определенным интегралом*** функции $f\left(x\right)$ на $\left[a,b\right]$ и обозначают

$$\int_a^b f\left(x\right) dx .$$

$f\left(x\right)$ – подынтегральная функция,

$f\left(x\right)dx$ – подынтегральное выражение,

a – нижний предел интегрирования,

b – верхний предел интегрирования.

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\cdot \Delta x_k . \qquad (2.3)$$

С учетом (2.3) работа переменной силы, величина которой является непрерывной функцией $F = F(x)$, действующей на отрезке $\left[a,b\right]$, равна определенному интегралу и (2.1) запишем в виде

$$A = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} F\left(\xi_k\right)\cdot \Delta x_k = \int_a^b F\left(x\right)dx . \qquad (2.4)$$

Равенство (2.4) выражает ***физический смысл*** определенного интеграла.

Геометрически определенный интеграл от непрерывной и неотрицательной на отрезке $\left[a,b\right]$ функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции и (2.2) запишем в виде

$$S_{кр.тр.} = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\cdot \Delta x_k = \int_a^b f\left(x\right)dx . \qquad (2.5)$$

2.3 Некоторые свойства определенного интеграла

Пусть $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ интегрируемы на отрезке $\left[a,b\right]$, α и β – любые действительные числа.

1. $\int_a^b f\left(x\right)dx = 0$.

2. $\int_a^b f\left(x\right)dx = -\int_b^a f\left(x\right)dx$.

3. Линейность интеграла: $\int_a^b \left(\alpha f\left(x\right) \pm \beta g\left(x\right)\right)dx = \alpha\int_a^b f\left(x\right)dx \pm \beta\int_a^b g\left(x\right)dx$.

4. Аддитивность интеграла: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

2.4 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. Для непрерывных функций справедлива формула ***Ньютона-Лейбница***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (2.6)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$.

2.5 Формула замены переменной в определенном интеграле

Теорема. Пусть функция $f(x)$:

1) определена и непрерывна на $[a,b]$;

2) $x = \varphi(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$ вместе со своей производной $\varphi'(t)$;

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедлива формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \qquad (2.7)$$

Замечание. Возвращаться к старой переменной нет необходимости.

2.6 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема. Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (2.8)$$