Примеры решения задач

1. $\int \frac{5}{x-4}dx = 5\int \frac{d(x-4)}{x-4} = 5\ln|x-4| + C$.

2. $\int \frac{6}{(x-3)^{10}}dx = 6\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^{10}} = 6\int (x-3)^{-10} d(x-3) = -\frac{2}{3\cdot(x-3)^9} + C$.

3. $\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx =$

$$= \left[\begin{array}{l|l} p^2-4q=-3<0 & t = x+\frac{1}{2} \Rightarrow \\ x^2+x+1 = \left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1 = & x = t-\frac{1}{2} \Rightarrow \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} & dx = dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)+3}{t^2+\frac{3}{4}}dt = 2\int \frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}} + 2\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \ln|x^2+x+1| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

4. $\int \frac{(x-3)dx}{(x^2+2x+5)^2}$.

$$\int \frac{(x-3)dx}{(x^2+2x+5)^2} = \left[\begin{array}{l|l} p^2-4q=-16<0 & t = x+1 \Rightarrow \\ x^2+2x+5 = \left(x^2+2\cdot x+1\right)+4 = & x = t-1 \Rightarrow \\ = (x+1)^2+4 = (x+1)^2+4 & dx = dt \end{array}\right] =$$

$$\int \frac{(t-4)dt}{(t^2+4)^2} = \int \frac{tdt}{(t^2+4)^2} - \int \frac{4dt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+4)}{(t^2+4)^2} - 4\int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = -\frac{1}{2(t^2+4)} - 4J_2.$$

Применим рекуррентную формулу **Ошибка! Источник ссылки не найден.** к интегралу

$$J_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{1}{8}J_1+\frac{1}{8}\cdot\frac{t}{t^2+4}=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+4}+\frac{t}{8\left(t^2+4\right)}=\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+\frac{t}{8\left(t^2+4\right)}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{(x-3)\,dx}{\left(x^2+2x+5\right)^2}=-\frac{1}{2\left(t^2+4\right)}-\frac{4}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}-\frac{4t}{8\left(t^2+4\right)}+C=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}-\frac{t+1}{2\left(t^2+4\right)}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+5\right)}+C.$$

5. $\int\frac{5x-4}{x^3-3x^2+2x}dx$.

Разложим знаменатель на множители:

$$x^3-3x^2+2x=x\left(x^2-3x+2\right)=x(x-1)(x-2).$$

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей с неизвестными коэффициентами и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{5x-4}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}.$$

Так как знаменатели данных рациональных дробей равны, то можно приравнять числители:

$$A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)=5x-4.$$

Получили систему линейных уравнений для определения A, B, C.

$$\left.\begin{matrix}x=0\\x=1\\x=2\end{matrix}\right|\quad\begin{cases}2A=-4,\\-B=1,\\2C=6,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2,\\B=-1,\\C=3.\end{cases}$$

Имеем

$$\frac{5x-4}{x(x-1)(x-2)}=\frac{-2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-2}.$$

Следовательно

$$\int\frac{5x-4}{x^3-3x^2+2x}dx=\int\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx=-2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=-2\ln|x|-\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C.$$

Используя свойства логарифма, получим:

$$\int \frac{5x-4}{x^3-3x^2+2x}dx = -2\ln|x| - \ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{(x-2)^3}{x^2(x-1)}\right| + C.$$

6. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$.

Выделим целую часть неправильной дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
-\,x^5 & & +2x^3 & & +4x & +4 & x^4+2x^3+2x^2 \\ \cline{7-7}
x^5 & +2x^4 & +2x^3 & & & & x-2 \\ \cline{1-3}
& -\,{-2x^4} & & & +4x & +4 & \\
& -2x^4 & -4x^3 & -4x^2 & & & \\ \cline{2-6}
& & 4x^3 & +4x^2 & +4x & +4 &
\end{array}$$

Получим

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби с неизвестными коэффициентами:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Приведем к общему знаменателю и приравняем числители получившихся дробей:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2} = \frac{Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+2x+2)},$$

$$Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2 = 4x^3+4x^2+4x+4,$$

$$(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+2B = 4x^3+4x^2+4x+4\cdot$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравняем коэффициенты и получим систему уравнений для определения A, B, C и D.

$$\begin{array}{c|l}
x^3 & \\
x^2 & \\
x^1 & \\
x^0 &
\end{array}
\quad
\begin{cases}
A+C=4,\\
2A+B+D=4,\\
2A+2B=4,\\
2B=4,
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
A=0,\\
B=2,\\
C=4,\\
D=2.
\end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$

и

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx=$$

$$=\int xdx-2\int dx+2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{4x+2}{x^2+2x+2}dx,$$

Вычислим последний интеграл

$$\int\frac{4x+2}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{4x+2}{\left(x+1\right)^2+1}dx=\left[x+1=t\Rightarrow x=t-1\Rightarrow dx=dt\right]=\int\frac{4\cdot\left(t-1\right)+2}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\frac{4tdt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}-2\operatorname{arctg}t+C=2\ln\left(t^2+1\right)-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=2\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\operatorname{arctg}\left(x+1\right)+C\cdot$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\operatorname{arctg}\left(x+1\right)+C.$$