1.4.2 Интегрирование правильных и неправильных рациональных дробей

Определение. ***Рациональной дробью*** или ***дробно-рациональной функцией*** называют отношение двух многочленов

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^n},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots b_n \in R$, причем $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$.

При $m < n$ дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называют ***правильной***, при $m \geq n$ – ***неправильной***.

Теорема. Пусть $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – правильная рациональная дробь, а разложение $Q_n(x)$ на произведение множителей имеет вид

$$Q_n(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\beta} (x^2 + px + q)^{\gamma} \cdot \ldots \cdot (x^2 + rx + s)^{\delta},$$

где $a, .., b$ – действительные корни, а $x^2 + px + q, \ldots, x^2 + rx + s$ – квадратные трехчлены, не разложимые на действительные множители. Тогда рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \ldots + \frac{M_{\gamma} x + N_{\gamma}}{(x^2 + px + q)^{\gamma}} + \ldots + \frac{K_{\delta} x + L_{\delta}}{(x^2 + rx + s)^{\delta}},$$

где $A_i, B_i, M_i, N_i, K_i, L_i$ - действительные числа.

Таким образом, интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей.

Замечание: Если дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ неправильная, то ее можно представить в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}, \quad (k < n),$$

то есть выделить из неё целую часть.

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию правильной дроби.