1.4 Интегрирование рациональных дробей

1.4.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

Определение. ***Простейшими рациональными дробями*** называются дроби:

1) $\dfrac{A}{x-a}$, 2) $\dfrac{A}{\left(x-a\right)^n}$, 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, 4) $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}$,

где A, B, C, a, p, q – некоторые постоянные, $n\in N$ и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{d\left(x-a\right)}{x-a} = A\ln\left|x-a\right|+C$.

2. $\displaystyle\int\frac{A}{\left(x-a\right)^n}dx = A\int\frac{d\left(x-a\right)}{\left(x-a\right)^n} = A\int\left(x-a\right)^{-n}d\left(x-a\right) = \frac{A}{\left(1-n\right)\cdot x^{n-1}}+C$.

3. $\displaystyle\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx =$

$$=\left[\begin{array}{l|l} p^2-4q<0 \Rightarrow q-\dfrac{p^2}{4}>0 & t=x+\dfrac{p}{2}\Rightarrow \\ \left(x^2+2\cdot\dfrac{p}{2}x+\dfrac{p^2}{4}\right)-\dfrac{p^2}{4}+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\left(\underbrace{q-\dfrac{p^2}{4}}_{a^2}\right)=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+a^2 & x=t-\dfrac{p}{2}\Rightarrow \\ & dx=dt \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{B\left(t-\dfrac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt = B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{2x+p}{2a}+C_1.$$

4. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx =$

$$=\left[\begin{array}{l|l} p^2-4q<0 \Rightarrow q-\dfrac{p^2}{4}>0, \quad x^2+px+q= & t=x+\dfrac{p}{2} \Rightarrow \\ =\left(x^2+2\cdot\dfrac{p}{2}x+\dfrac{p^2}{4}\right)-\dfrac{p^2}{4}+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\left(\underbrace{q-\dfrac{p^2}{4}}_{a^2}\right)=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+a^2 & x=t-\dfrac{p}{2} \Rightarrow \\ & dx=dt \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt=A\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}.$$

Первый интеграл берется подведением функции под знак дифференциала

$$A\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\frac{A}{2}\int\left(t^2+a^2\right)^{-n}d\left(t^2+a^2\right)=\frac{A}{2}\cdot\frac{\left(t^2+a^2\right)^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{A}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+C.$$

Второй интеграл $J_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$ вычисляется по рекуррентной формуле

$$J_{n+1}=\frac{2n-1}{2na^2}\cdot J_n+\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}. \tag{1.4}$$