

1 Неопределенный интеграл

1.1 Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на заданном промежутке D , если для всех x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Свойства первообразной

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке D , то и $F(x) + C$, где $C = const$ также является первообразной для $f(x)$.

Доказательство. По условию $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке D , согласно определению первообразной $F'(x) = f(x)$. Найдём

$$(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x).$$

Следовательно, $F(x) + C$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке D , что и требовалось доказать.

Теорема 2. Любые две первообразные для функции $f(x)$ на промежутке D отличаются друг от друга постоянной.

Доказательство. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ – любые две первообразные для функции $f(x)$ на промежутке D , тогда

$$F'(x) = f(x) \text{ и } \Phi'(x) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x)$ и найдём ее производную

$$\varphi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in D.$$

Согласно условию постоянства функции, заключаем

$$F(x) - \Phi(x) = C, \quad \forall x \in D, \text{ где } C = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если $F(x)$ одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке D , то множество всех первообразных для функции $f(x)$ на этом промежутке имеет вид $F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Определение. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке D называют **неопределенным интегралом** функции $f(x)$ и обозначают

$$\int f(x) dx.$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad x \in D, C = \text{const}. \quad (1.2)$$

Функция $f(x)$ – называется **подынтегральной** функцией, а выражение $f(x) dx$ – **подынтегральным выражением**.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx;$
3. $\int df(x) = f(x) + C;$
4. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, k = \text{const};$
5. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

Геометрический смысл неопределенного интеграла

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство функций, графики которых получены при помощи параллельного переноса вдоль оси ординат одного из графиков.

Пример.

$$\int 2x \, dx = x^2 + C.$$

Если $C_1 = 0$, то $F_1(x) = x^2$.

Если $C_2 = 1$, то $F_2(x) = x^2 + 1$.

Если $C_3 = -1$, то $F_3(x) = x^2 - 1$.

.....

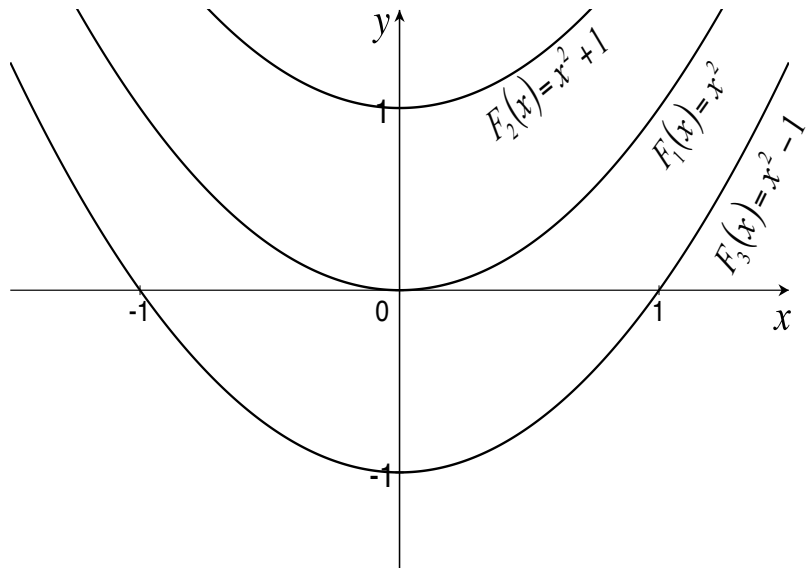


Рисунок 1.1

То есть, неопределенный интеграл от функции $f(x) = 2x$ представляет собой семейство парабол (рисунок 1.1).

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на $D(f)$, то она на этом промежутке интегрируема.