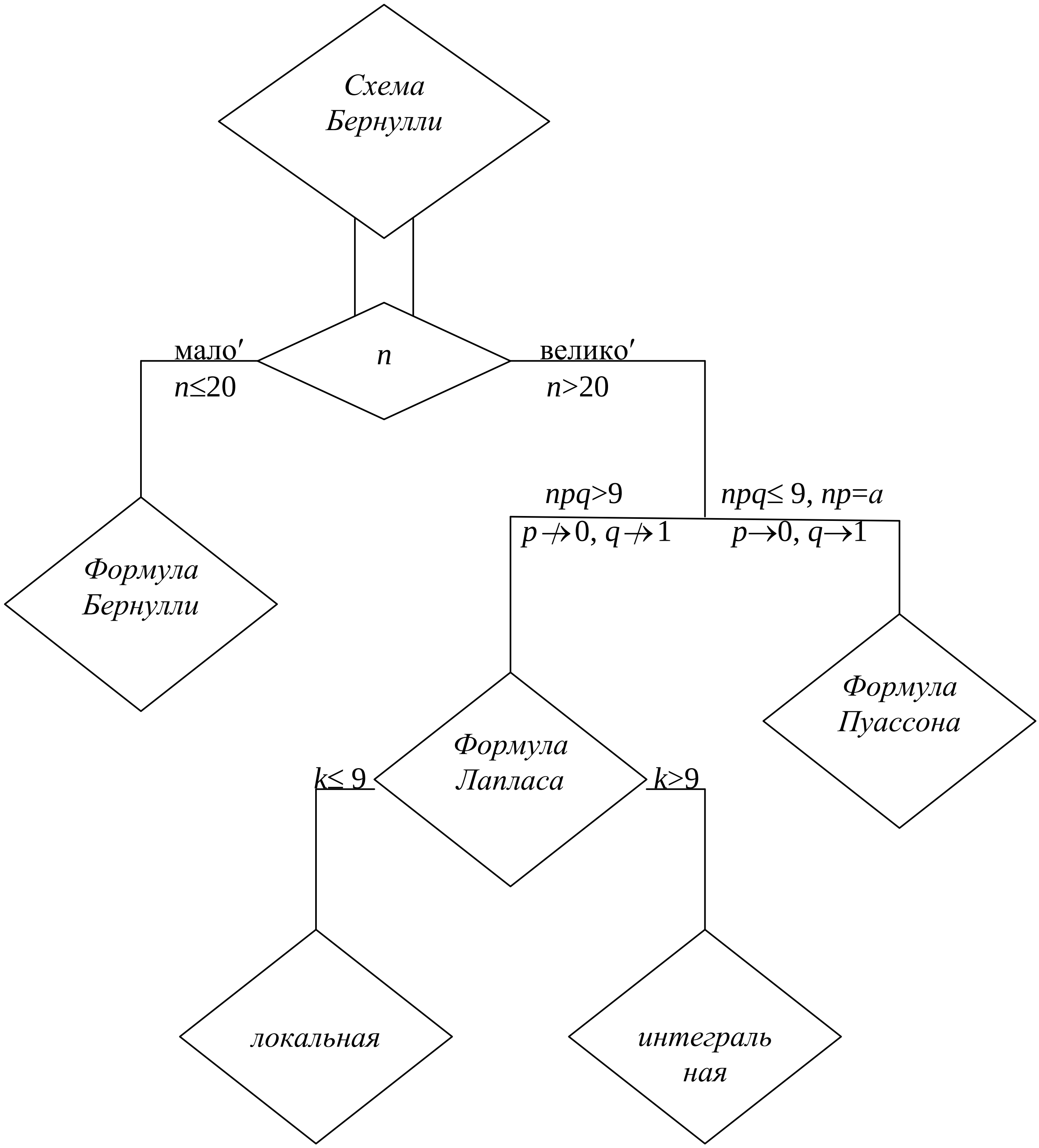
Повторные независимые испытания.

Если производится несколько испытаний, причём вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события А*.

Будем рассматривать такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Схема Бернулли: проводится n повторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом, причём вероятность появления в каждом испытании постоянна и равна p.



Формула Бернулли.

Если выполняется схема Бернулли и n – мало, а вероятности p и q ($p+q=1$) отличны от нуля и единицы, то для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{или} \quad P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

Задача 1

Вероятность того, что лампа останется неисправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что из пяти ламп не менее трёх останутся исправными после 1000 часов работы.

Решение

Итак, $p=0{,}8$ и $q=0{,}2$ – соответственно вероятности противоположных событий, что лампа останется исправной и неисправной после 1000 часов работы ($p+q=0{,}8+0{,}2=1$).

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится $n=5$ повторных независимых испытаний (проверяется на исправность пять ламп); с двумя исходами в каждом (после 1000 часов работы лампа останется исправной или неисправной); вероятность $p=0{,}8$ – исправности лампы после 1000 часов работы в каждом испытании постоянна.

Так как число независимых испытаний мало ($n=5$), а вероятности $p=0{,}8$ – отлична от 0 и $q=0{,}2$ – отлична от 1 и число благоприятствующих условию исходов мало (того, что из пяти ламп не менее трёх останутся исправными после 1000 часов работы), их три ($k\geq 3 \Rightarrow k=3;\ 4;\ 5$), то для вычисления заданной вероятности применим формулу Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^n q^{n-k}$

$$P_{n=5}(k\geq 3)=P_{n=5}(k=3)+P_{n=5}(k=4)+P_{n=5}(k=5)=$$

$$=C_5^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^{5-3}+C_5^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^{5-4}+C_5^5\cdot 0{,}8^5\cdot 0{,}2^{5-5}=$$

$$=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2+\frac{5!}{4!\cdot(5-4)!}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^1+\frac{5!}{5!\cdot(5-5)!}\cdot 0{,}8^5\cdot 0{,}2^0=$$

$$=10\cdot 0{,}512\cdot 0{,}04+5\cdot 0{,}4096\cdot 0{,}2+0{,}32768=0{,}94208$$

Ответ: 0,9421.

Задача 2

Что вероятнее выиграть у равносильного противника в шахматы две партии из четырёх или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится $n=4$ (или 6) повторных независимых испытаний (____); с двумя исходами в каждом (_______________________________________); вероятность p=______ – ______________________________________ в каждом испытании постоянна.

две партии из четырёх	**три партии из шести**
Так как число независимых испытаний мало ($n=4$), а вероятность $p=0{,}5$ и $q=1-p=1-0{,}5=0{,}5$ – отличны от 0 и 1, применим формулу Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $P_{n=4}(k=2)=\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5^{4-2}=$	Так как число независимых испытаний мало (n=__), а вероятность p=___ и $q=1-p$=_______ – __________ 0 и 1, применим формулу ___________:

Повторные независимые испытания. Схема Бернулли.

При разыгрывании двух партий из четырёх возможны следующие 6 событий или __________ равновозможных несовместных элементарных исходов:

	Событие	Число исходов	Это же событие
1	выигрыш четырёх партий из четырёх	+ + + +	
2	выигрыш трёх партий из четырёх	+ + + – + + – + + – + + – + + +	
3	выигрыш двух партий из четырёх	+ + – – + – + – + – – + – + + – – + – + – – + +	
4	выигрыш одной партии из четырёх	+ – – – – + – – – – + – – – – +	
5	выигрыш нуль партий из четырёх	– – – –	

Итак, число благоприятствующих событию равновозможных несовместных элементарных исходов (выигрыш у равносильного противника в шахматы двух партий из четырёх) равно __________________.

Согласно классическому определению вероятности – вероятность выигрыша у равносильного противника в шахматы двух партий из четырёх, равна:

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{\quad}{\quad}$$

Что вероятнее выиграть у равносильного противника в шахматы две партии из четырёх (событие A) **или три партии из четырёх** (событие B) **(ничьи во внимание не принимаются)?**

Согласно классическому определению вероятности – вероятность выигрыша у равносильного противника в шахматы двух партий из четырёх, равна:

$$p(A)=\frac{\quad}{\quad}$$

Согласно классическому определению вероятности – вероятность выигрыша у равносильного противника в шахматы трёх партий из четырёх, равна:

$$p(B)=\frac{\quad}{\quad}$$

Что вероятнее проиграть у равносильного противника в шахматы две партии из четырёх или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Задача 3

Что вероятнее выиграть у равносильного противника в шахматы две партии из пяти или три партии из пяти (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится n=___ повторных независимых испытаний (____); с двумя исходами в каждом (__________________________); вероятность p=_____ – ____________________________ в каждом испытании постоянна.

две партии из пяти	**три партии из пяти**
Так как число независимых испытаний мало (n=5), а вероятность p=0,5 и q=1-p=1-0,5=0,5 – отличны от 0 и 1, применим формулу Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $P_{n=}\ (k=\ \ )=$	Так как число независимых испытаний мало (n=5), а вероятность p=0,5 и q=1-p=1-0,5=0,5 – отличны от 0 и 1, применим формулу Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $P_{n=}\ (k=\ \ )=$

Ответ:____

Задача 4

Кто ошибается чаще: судья, принимающий правильное решение с вероятностью 0,8, или коллегия трёх судей, каждый из которых ошибается с вероятностью 0,3, если коллегия принимает решения большинством голосов?

один судья	**коллегия трёх судей**
Судья, принимающий правильное решение с вероятностью _____ соответственно ошибается с вероятностью _____.	Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится n=___ повторных независимых испытаний (____); с двумя исходами в каждом (__________________________); вероятность p=_____ – ____________________________ в каждом испытании постоянна. Так как число независимых испытаний мало (n=), а вероятность p=____ и q=1-p=______ – отличны от 0 и 1, применим формулу Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $P_{n=}\ (k\ \ \ \ )=$ =0,216

Ответ:____

Локальная теорема Лапласа.

Если выполняется схема Бернулли и n – достаточно велико, а вероятности p и q ($p+q=1$) отличны от нуля и единицы и $npq>9$, то для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз применим локальную формулу Лапласа (она тем точнее, чем больше n):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \quad где \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Таблица для $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ приведена в учебнике, причём данная функция чётная, то есть $\varphi(-x)=\varphi(x)$, и для всех $|x|\geq 4$ $\varphi(x)=0$.

Формулу имеет смысл применять при $npq>9$.

Очевидно, что погрешность формулы при больших n мала. В литературе встречаются различные варианты описаний границ применимости этой формулы:

а) при $npq>9$;

б) $n>100$, $npq>20$ (и другие).

Однако все исследователи сходятся к тому, что наиболее хорошие результаты при $p=q=0{,}5$.

Задача 5

На десяти карточках написаны натуральные числа от 1 до 10 (по одному числу на каждой карточке). Наудачу вынимают одну карточку, после чего её возвращают обратно, и все карточки перемешивают. Найти вероятность того, что в результате 100 испытаний карточка, на которой написано простое число, будет вытащена 50 раз.

Решение:

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится $n=100$ повторных независимых испытаний (100 раз вынимаются карточки) с двумя исходами в каждом (выбрано простое число, либо нет). Вероятность события, что выбрана карточка, на которой написано простое число в каждом испытании постоянна и равна $p=0{,}4$.

Простыми из данных десяти чисел являются: 2, 3, 5, 7. Поэтому число благоприятствующих исходов равно $m=4$. Значит, $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

Так как число независимых испытаний велико $n=100$, а вероятности $p=0{,}4$ и $q=0{,}6$ – отличны от 0 и 1, то для вычисления заданной вероятности применим локальную формулу Лапласа ($npq=100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=24>9$ выполняется): $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, $где$ $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

В задаче $n=100$; $p=0{,}4$; $q=1-p=1-0{,}4=0{,}6$; $k=50$.

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{50-100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}} = \frac{10}{\sqrt{24}} = 2{,}04$$

$\varphi(2{,}04)=0{,}0497$

$$P_{100}(50) = \frac{1}{\sqrt{24}}\cdot 0{,}0497 = 0{,}0101$$

Ответ: 0,0101

Задача 6

На выборах в регионе явка избирателей составила 64%. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных лиц, имеющих право голосования, 275 – голосовали.

Решение:

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*:____

____

____

применим локальную формулу Лапласа: n=____; p=___; q=1-p=___; k=____; npq=_________>9

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=$$

$$\varphi(\qquad)=$$

$$P\ (\qquad)=$$

Ответ: 0,0059.

Задача 7

Авиационный завод выпускает самолёты, 99% которых удовлетворяют всем стандартам. Найти вероятность того, что среди 200 самолётов все самолёты удовлетворяют стандартам.

Решение:

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*:____

____

____

применим локальную формулу Лапласа: n=____; p=___; q=1-p=___; k=____; npq=_________>9

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=$$

$$\varphi(\qquad)=$$

$$P\ (\qquad)=$$

Ответ: 0,1033.

Задача 8

Игральная кость подбрасывается 100 раз. Найти вероятность наивероятнейшего числа выпадений «шестёрки» на верхней грани.

Решение:

Рассчитаем наивероятнейшее число выпадений «шестёрки» на верхней грани по формуле: $np-p\le k<np+q$, то есть

$$100\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\le k<100\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\Rightarrow 16{,}5\le k<17{,}5$$

Итак, наивероятнейшее число выпадений «шестёрки» на верхней грани равно 17.

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*:____

____

____

применим локальную формулу Лапласа: n=____; p=___; q=1-p=___; k=____; npq=_________>9

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=$$

$$\varphi(\qquad)=$$

$$P\ (\qquad)=$$

Ответ: 0,1066.

Формула Пуассона.

Если выполняется схема Бернулли и n – достаточно велико, а вероятности p и q ($p+q=1$) близки к нулю и единице, при этих условиях $np=a$ – некоторое небольшое число, а $npq\le 9$, то для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз применим формулу Пуассона:

$$\boxed{P_n(k)\approx\frac{a^k e^{-a}}{k!}\quad где\quad a=np}$$

Формула Пуассона применяется в тех случаях, когда $npq\le 9$.

Задача 9

Завод «Золотая балка» (Крым) отправил в Москву 2000 бутылок вина «Каберне». Вероятность того, что в пути бутылка может разбиться, равна 0,001. Найти вероятность того, что в пути будет разбито:

- **а) 2 бутылки;**
- **б) не более 4-х бутылок;**
- **в) более 4-х бутылок.**

Решение:

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится n=______ повторных независимых испытаний (____); с двумя исходами в каждом (______________________________________); вероятность того, что ______________________________, в каждом испытании постоянна и равна p=____________.

Итак, схема Бернулли выполняется и n=______ – достаточно ___________, а вероятности p=____________ и q=____________ ($p+q=1$), при этих условиях np=______________=a – некоторое небольшое число и формула Пуассона применяется в тех случаях, когда npq=________________________.

- Итак, для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях ровно $k=2$ раза применим формулу Пуассона:

$$P_n(k)\approx\frac{a^k e^{-a}}{k!}\quad где\quad a=np.$$

$$a=np=$$

$$P_{2000}(2)= \qquad\qquad =0{,}2707$$

- Итак, для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях не более, чем $k=4$ раза также применим формулу Пуассона:

$$P_{2000}(k\le 4)=P_{2000}(k=4)+P_{2000}(k=3)+P_{2000}(k=2)+P_{2000}(k=1)+P_{2000}(k=0)=$$

$$=\frac{2^4 e^{-2}}{4!}+$$

$$=0{,}0902+ \qquad\qquad =0{,}9473$$

- Итак, для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях более, чем $k=4$ раза воспользуемся теоремой о сумме вероятностей противоположных событий:

$$P_{2000}(k>4)+P_{2000}(k\le 4)=1$$

Ответ:

Задача 10

Телефонная станция обслуживает 4000 абонентов. Вероятность позвонить любому абоненту в течение часа равна 0,0015. Какова вероятность, что в течение часа позвонят:

а) 6 абонентов;
б) не более 3-х абонентов;
в) более 3-х абонентов.

Решение:

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится n=______ повторных независимых испытаний (____); с двумя исходами в каждом (___________________________________); вероятность того, что ___________________________, в каждом испытании постоянна и равна p=____________.

Итак, схема Бернулли выполняется и n=______ – достаточно ___________, а вероятности p=____________ и q=____________ ($p+q=1$), при этих условиях np=_____________=a – некоторое небольшое число и формула Пуассона применяется в тех случаях, когда npq=______________________.

- Итак, для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях ровно k=6 раз применим формулу Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{a^k e^{-a}}{k!} \quad где \quad a = np.$$

$$a = np =$$

$$P_{4000}(6) =$$

- Итак, для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях не более, чем k=3 раза также применим формулу Пуассона:

$$P_{4000}(k \le 3) =$$

- Итак, для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях более, чем k=3 раза воспользуемся теоремой о сумме вероятностей противоположных событий:

Ответ: 0,1606, 0,1512, 0,8488.

Интегральная теорема Лапласа.

Если выполняется схема Бернулли и n – достаточно велико, а вероятности p и q ($p+q=1$) отличны от нуля и единицы и $npq>9$, то для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (от k_1 до k_2), при этом их достаточно велико) применим интегральную формулу Лапласа:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad где \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

или

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$$

Таблица для $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – нормированная функция Лапласа приведена в учебнике[1], причём данная функция нечётная, то есть $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, и для всех $|x|>5$ $\Phi(x)=0,5$.
Формулу имеет смысл применять при $npq>9$.

Замечание: интегральная теорема Лапласа применяется для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (от k_1 до k_2 – оба этих значения включаются в исследуемый интервал, то есть неравенство нестрогое $[k_1; k_2]$). Для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях более k_1 и менее k_2 раз (от k_1 до k_2 – но теперь оба этих значения не включаются в исследуемый интервал, то есть неравенство строгое $(k_1; k_2)$) следует взять значения от k_1+1 до k_2-1 раз.
Замечание: если число раз от k_1 до k_2 невелико (менее 9), то для нахождения вероятности, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз можно применить формулу Бернулли, Лапласа или Пуассона в зависимости от условий для каждого такого k_i (от k_1 до k_2) и результаты сложить как сумму вероятностей несовместных событий.

Таблица для $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа приведена в учебнике, причём данная функция обладает свойством $\Phi(-x)+\Phi(x)=1$.
$\Phi(x)=0,5+\Phi_0(x)$.

В Microsoft Excel:

- ✓ значения функции Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ НОРМРАСП(x; 0; 1; 0);
- ✓ значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ НОРМРАСП(x; 0; 1; 1);
- ✓ значения нормированной функции Лапласа $\Phi_0(x) = \Phi(x) - 0{,}5$ НОРМРАСП(x; 0; 1; 1)-0,5;

[1] Необходимо быть внимательным при выборе таблицы в различных учебниках даются таблицы различных функций. Значения и свойства нормированной функции Лапласа Φ_0 отличаются от значений и свойств функции Лапласа.

Задача 11

Оптовая база снабжает товаром 625 магазинов. Вероятность того, что в течение дня поступит заявка на товар равна 0,8 для каждого магазина. Найдите вероятность того, что в течение дня поступит не менее 480 и не более 500 заявок.

Решение:

Данная задача удовлетворяет *схеме Бернулли*: проводится n=______ повторных независимых испытаний (____); с двумя исходами в каждом (__________________________); вероятность события, что ____________________________________ в каждом испытании постоянна и равна p=0,8.

Для решения задачи воспользуемся интегральной теоремой Лапласа, так как ________________

____

по условию задачи, n=625; p=0,8; q=1-p=1-0,8=0,2; k_1=480 k_2=500.

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{480 - 625 \cdot 0{,}8}{\sqrt{625 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} =$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - 625 \cdot 0{,}8}{\sqrt{625 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} =$$

$$P_{625}(480;\quad 500) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = 0{,}4772$$

Задача 12

Вероятность возврата в срок потребительского кредита каждым из 150 заёмщиков в среднем равна 0,9. Найти вероятность того, что к назначенному сроку кредит вернут:

а) не менее 120 человек и не более 140 человек;

б) более 139 человек;

в) менее 125 человек.

Решение:

Данная задача удовлетворяет схеме Бернулли:

Проводятся n=150 повторных независимых испытаний (проверяются 150 заёмщиков на возврат в срок кредитов) с двумя исходами в каждом (либо кредит возвращён в срок, либо нет), при этом вероятность возврата в срок потребительского кредита в каждом испытании постоянна p=0,9.

а) Для нахождения вероятности того, что к назначенному сроку кредит вернут не менее k_1=120 человек и не более k_2=140 человек, воспользуемся интегральной теоремой Лапласа, так как число испытаний достаточно велико, а вероятности p и q отличны от 0 и 1, npq=150·0,9·0,1=13,5>9:

по условию задачи, n=150; p=0,9; q=1-p=1-0,9=0,1; k_1=120 k_2=140.

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} =$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} =$$

$$P_{150}(120 \le k \le 140) =$$

б) Для нахождения вероятности того, что к назначенному сроку кредит вернут более 139 человек, воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

по условию задачи, n=150; p=0,9; q=0,1; k_1=140 k_2=150.

$x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} =$

$x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} =$

$P_{150}(m > 139) = P_{150}(k \ge 140) = P_{150}(140 \le k \le 150) =$

в) Для нахождения вероятности того, что к назначенному сроку кредит вернут менее 125 человек, воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

по условию задачи, n=150; p=0,9; q=0,1; k_1=0 k_2=124.

$x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} =$

$x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} =$

$P_{150}(m < 125) = P_{150}(k \le 124) = P_{150}(0 \le k \le 124) =$

Ответ:

Задача 13

Игральная кость подбрасывается 100 раз. Найти вероятность того, что «пятёрка» выпадет от 10 до 20 раз.

Ответ: 0,7776.

Задача 14

Испытание состоит в одновременном подбрасывании двух монет. Какова вероятность того, что при 200 испытаниях на обеих монетах герб выпадет:

а) ровно 50 раз;

б) от 40 до 60 раз включительно?

Ответ: 0,0651; 0,8975.

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях.

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства: $np-q \le k_0 \le np+p$. Причём:

- если число $np-q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;
- если число $np-q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно k_0 и k_0+1;
- если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0=np$.

Задача 15

По известной статистике 1960-ых на 10 девочек приходится 9 мальчиков. Найти наиболее вероятное число девушек среди ста школьных выпускников 1980-го года и соответствующую этому событию вероятность.

Решение:

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства: $np-q \le k_0 \le np+p$. По условию задачи: $p=\frac{m}{n}=\frac{10}{10+9}=\frac{10}{19};\quad q=1-p=1-\frac{10}{19}=\frac{9}{19}$

$$100\cdot\frac{10}{19}-\frac{9}{19}\le k_0\le 100\cdot\frac{10}{19}+\frac{10}{19}$$

$$52{,}2\le k_0\le 53{,}2$$

Но так как число девушек выражается целым значением, то наиболее вероятное число девушек среди ста школьных выпускников 1980-го года – ____ девушки.

Итак, вычислим вероятность того, что среди ста школьных выпускников 1980-го года 53 выпускницы:

Производящая функция.

Пусть проводится n повторных независимых испытаний, причём в первом испытании вероятность появления события A равна p_1, во втором – p_2, в n-м – p_n; вероятности непоявления события A соответственно равны q_1, q_2, …, q_n; $P_n(k)$ – вероятность появления события A в n испытаниях ровно k раз.

Производящей функцией вероятностей $P_n(k)$ появления события называют функцию определяемую равенством:

$\varphi_n(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)(p_3z+q_3)\dots(p_nz+q_n)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\dots+a_{n-2}z^2+a_{n-1}z+a_n$

$a_0+a_1+a_2+\dots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=1$

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях, в первом из которых вероятность появления события A равна p_1, во втором – p_2, в n-м – p_n событие A появится ровно k раз, равна коэффициенту при z^k в разложении производящей функции по степеням z.

По данным задачи можно составить две производящие функции:

$\varphi_n(z)$ – появления события A и $\psi_n(z)$ – непоявления события A.

$\psi_n(z)=(q_1z+p_1)(q_2z+p_2)(q_3z+p_3)\dots(q_nz+p_n)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\dots+a_2z^2+a_1z+a_0$

$a_0+a_1+a_2+\dots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=1$

Задача 16

Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятности того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего, соответственно равны 0,1; 0,2; 0,15. Какова вероятность того, что в течении часа:

- **а) ни один[2] станок не потребует внимания рабочего;**
- **б) все три станка потребуют внимания рабочего;**
- **в) все три станка не потребуют внимания рабочего;**
- **г) только один станок потребует внимания рабочего;**
- **д) какие-нибудь два станка не потребуют внимания рабочего;**
- **е) какой-нибудь один станок потребует внимания рабочего;**
- **ж) хотя бы[3] один станок потребует внимания рабочего;**
- **з) хотя бы один станок не потребует внимания рабочего;**
- **и) более половины станков потребуют внимания рабочего;**
- **к) менее половины станков не потребуют внимания рабочего.**

Решение:

Вероятности того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего, соответственно равны:

$p_1=0{,}1$;

$p_2=0{,}2$;

$p_3=0{,}15$.

Тогда по теореме о сумме вероятностей противоположных событий вероятности того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, соответственно равны:

$q_1=1-p_1=1-0{,}1=0{,}9$;

$q_2=1-p_2=1-0{,}2=0{,}8$;

$q_3=1-p_3=1-0{,}15=0{,}85$.

- ✓ Составим *производящую функцию вероятностей числа станков требующих внимания рабочего*:

$\varphi_3(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)(p_3z+q_3)=(0{,}1z+0{,}9)(0{,}2z+0{,}8)(0{,}15z+0{,}85)$

$\varphi_3(z)=0{,}003z^3+0{,}056z^2+0{,}329z+0{,}612$

---

[2] В математической логике: «Ни один S не есть P» равносильно «Все S не есть P».

[3] В математической логике: «Хотя бы один из n …» равносильно «Не менее 1» или «Более или равно 1» или «$n\geq1$».

(контроль: 0,003+0,056+0,329+0,612=1)

- ✓ Составим *производящую функцию вероятностей числа станков не требующих внимания рабочего*:

$\psi_3(z)=(q_1z+p_1)(q_2z+p_2)(q_3z+p_3)=(0{,}9z+0{,}1)(0{,}8z+0{,}2)(0{,}85z+0{,}15)$

$\psi_3(z)=0{,}612z^3+0{,}329z^2+0{,}056z+0{,}003$

(контроль: 0,612+0,329+0,056+0,003=1)

тогда коэффициенты производящих функций дают следующие вероятности:

а) 0,612 — при z^3 в $\psi_3(z)$

б) 0,003 — при z^3 в $\varphi_3(z)$

в)

г)

д)

е)

ж)

з)

и)

Задача 17

В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включён, равна 0,8. Найти вероятность того, что он в данный момент:

а) включено 4 мотора;
б) включены все моторы;
в) работает половина моторов;
г) работает более половины моторов;
д) работает не менее половины моторов.

Решение:

Составим производящую функцию:

$\varphi_6(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)(p_3z+q_3)(p_4z+q_4)(p_5z+q_5)(p_6z+q_6)$ или $\varphi_6(z)=(pz+q)^6$;

$\varphi_6(z)=\qquad z^6+\qquad z^5+\qquad z^4+\qquad z^3+\qquad z^2+\qquad z+\qquad ;$

контроль: ____

Вероятность того, что он в данный момент:

а) включено 4 мотора______________________________

б) включены все моторы______________________________

в) работает половина моторов______________________________

г) работает более половины моторов______________________________

д) работает не менее половины моторов______________________________

Таблица значений функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $\varphi(-x)=\varphi(x)$ - чётная, $\varphi(x\geq 4)=0$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Например:

$\varphi(0)=0{,}3989$	$\varphi(1{,}51)=$	$\varphi(3{,}99)=$	$\varphi(2{,}63)=$
$\varphi(0{,}4)=0{,}3986$	$\varphi(-1{,}51)=$	$\varphi(-4{,}11)=$	$\varphi(-0{,}25)=$

Таблица значений функции $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$ - нечётная, $\Phi_0(x\ge 5)=0{,}5$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,499952	0,499954	0,499956	0,499958	0,499959	0,499961	0,499963	0,499964	0,499966	0,499967
4,0	0,499968	0,499970	0,499971	0,499972	0,499973	0,499974	0,499975	0,499976	0,499977	0,499978
4,1	0,499979	0,499980	0,499981	0,499982	0,499983	0,499983	0,499984	0,499985	0,499985	0,499986
4,2	0,499987	0,499987	0,499988	0,499988	0,499989	0,499989	0,499990	0,499990	0,499991	0,499991
4,3	0,499991	0,499992	0,499992	0,499993	0,499993	0,499993	0,499993	0,499994	0,499994	0,499994
4,4	0,499995	0,499995	0,499995	0,499995	0,499995	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996
4,5	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499998	0,499998	0,499998
4,6	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499999	0,499999
4,7	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999
4,8	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999
4,9	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000

Например:

$\Phi_0(0)=0$	$\Phi_0(1{,}51)=$	$\Phi_0(3{,}99)=$	$\Phi_0(5{,}63)=$
$\Phi_0(-0{,}4)=-0{,}1554$	$\Phi_0(-1{,}51)=$	$\Phi_0(-4{,}11)=$	$\Phi_0(-7{,}25)=$