Теоремы сложения и умножения вероятностей.

События называют **несовместными**, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление другого. События называют **совместными**, если в одном и том же испытании появление одного из них не исключает появление другого (могут одновременно произойти).	$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB)$, где A и B – *совместные*	$p(A+B)=p(A)+p(B)$, где A и B – *несовместные*, то есть $p(AB)=0$
Событие A называется **независимым** от события B, если вероятность появления события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется **зависимым** от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.	$p(AB)=p(A)p_A(B)$, или $p(AB)=p(B)p_B(A)$, где A и B – *зависимые*	$p(AB)=p(A)p(B)$, где A и B - *независимые*, то есть $p_A(B)=p(B)$, $p_B(A)=p(A)$

Задача 1.

Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго – 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадёт хотя бы один спортсмен?

Решение:

Обозначим события:
A - в мишень попадёт хотя бы один спортсмен;
A_1 – в мишень попадёт первый спортсмен;
A_2 – в мишень попадёт второй спортсмен.
Очевидно, что $A=A_1+A_2$ и события A_1 и A_2 – совместные.
$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=0{,}85+0{,}8-0{,}85\cdot 0{,}8=0{,}97$.
Ответ: 0,97.

Задача 2.

В коробке 10 шаров, из которых 4 белых, а остальные – чёрные. Наудачу выбираем три шара. Какова вероятность того, что среди выбранных, хотя бы один белый.

Решение:

Обозначим события:
A - из трёх, выбранных шаров хотя бы один белый;
A_1 – из трёх, выбранных шаров ровно один белый;
A_2 – из трёх, выбранных шаров ровно два белых;
A_3 – из трёх, выбранных шаров ровно три белых.
События A_1, A_2 и A_3 – несовместны, поэтому $P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$.

Используя формулу $p=\dfrac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$, находим при $N=10$, $n=4$, $m=3$, $k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=3$

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}+\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}+\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=0{,}5+0{,}3+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

Ответ: 5/6.

Задача 3.

Игральный кубик подбрасывается три раза. Какова вероятность того, что 6 выпадет ровно два раза.

Решение:

Обозначим события:

A – 6 выпадет ровно два раза;

A_1 – 6 выпадет первый раз;

A_2 – 6 выпадет второй раз;

A_3 – 6 выпадет третий раз, соответственно противоположные им события:

$\bar{A}_1$ – 6 не выпадет первый раз;

$\bar{A}_2$ – 6 не выпадет второй раз;

$\bar{A}_3$ – 6 не выпадет третий раз.

Очевидно, что $A = A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$. Тогда по теореме сложения вероятностей совместных $A_1A_2\bar{A}_3$; $A_1\bar{A}_2A_3$; $\bar{A}_1A_2A_3$ событий и по теореме произведения вероятностей независимых A_1; A_2; A_3; $\bar{A}_1$; $\bar{A}_2$; $\bar{A}_3$ событий имеем:

$$p(A) = p(A_1)p(A_2)p(\overline{A_3}) + p(A_1)p(\overline{A_2})p(A_3) + p(\overline{A_1})p(A_2)p(A_3) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{72}$$

Ответ: 5/72.

Противоположные события.

Два единственно возможных события, образующих полную группу, называются *противоположными*. Если событие обозначено через A, то противоположное ему событие обозначается через $\bar{A}$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Задание 1. Какие из следующих пар событий являются противоположными? Если события не противоположные, то напишите противоположные события:

События	Вид событий	Противоположные события
Пусть брошена одна монета A_1: – выпал «герб»; A_2: – выпала «решка»;		
Пусть брошена одна монета A_1: – выпал «герб»; A_2: – не выпал «герб»;		
A_1: – идёт снег; A_2: – идёт дождь;		
Брошен игральный кубик A_1: – выпала «1»; A_2: – выпала «6»;		
A_1: – Иванов сдал экзамен на отлично; A_2: – Иванов сдал экзамен на хорошо;		

Формула полной вероятности.

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, B_3, …B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

$$\text{где}\quad P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=1$$

или

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

$$\text{где}\quad \sum_{i=1}^{n}P(B_i)=1$$

Формула Байеса.

Пусть событие A, может наступить лишь при условии появлении одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, B_3, …B_n, образующих полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса:

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)},\quad i=1,2,\ldots,n$$

$$\text{где}\quad P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

$$\text{и}\quad P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=1$$

Задача 4.

В магазин поступает минеральная вода в бутылках от двух изготовителей: местного и иногороднего, причём местный изготовитель поставляет 40% всей продукции. Вероятность того, что при транспортировке бутылка окажется разбитой, для местной продукции – 0,5%, а для иногородней продукции – 2%. Найдите вероятность того, что взятая наудачу бутылка окажется неразбитой. Какова ожидаемая доля разбитых бутылок? Найти вероятность того, что взятая разбитая бутылка иногороднего изготовителя.

Решение:

Пусть события означают:

A – «взятая наудачу бутылка окажется неразбитой»;

$\bar{A}$ – «взятая наудачу бутылка окажется разбитой».

Пусть гипотезы B_1 и B_2 означают соответственно, что минеральная вода в бутылке местного изготовителя и иногороднего изготовителя. Согласно условию задачи:

$p(B_1)$=0,4;

$p(B_2)$=0,6 - местный изготовитель поставляет 40% всей продукции, следовательно иногородний 60%.

$p(\bar{A}/B_1)$=0,005;

$p(\bar{A}/B_2)$=0,02 – условные вероятности события $\bar{A}$, при условии, что событие B_1 (B_2) произошло - вероятности того, что при транспортировке бутылка окажется разбитой, для местной продукции (иногородней) продукции.

Тогда по теореме о сумме вероятностей противоположных событий: $p(A/B_i)+p(\bar{A}/B_i)=1$ находим:

$p(A/B_1)=1-p(\bar{A}/B_1)=1-0,005=0,995$;

$p(A/B_2)=1-p(\bar{A}/B_2)=1-0,02=0,98$ – условные вероятности события A, при условии, что событие B_1 (B_2) произошло - вероятности того, что при транспортировке бутылка окажется неразбитой, для местной продукции (иногородней) продукции.

Для вычисления искомой вероятности применим формулу полной вероятности:

$p(A)=p(A/B_1)\cdot p(B_1)+p(A/B_2)\cdot p(B_2)=0,995\cdot 0,4+0,98\cdot 0,6=0,986$

$p(A)=0,986$ - искомая вероятность того, что взятая наудачу бутылка окажется неразбитой (или 98,6% неразбитых бутылок).

$p(\bar{A})=1-0,986=0,014$

$p(\bar{A})=0,014$ - искомая вероятность того, что взятая наудачу бутылка окажется разбитой (или 1,4% разбитых бутылок).

Для вычисления вероятности того, что взятая разбитая бутылка иногороднего изготовителя применим формулу Байеса:

$$P\left(B_2/\overline{A}\right)=\frac{P(B_2)\cdot P\left(\overline{A}/B_2\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{0,012}{0,014}=\frac{6}{7}\approx 0,857$$

$p(B_2/\bar{A})=0,857$ – искомая вероятность того, что взятая разбитая бутылка иногороднего изготовителя.

Задача 5.

В магазин поступают телевизоры трёх фирм: Samsung, LG и Sony, причём половину всей продукции составляют телевизоры всей продукции Sony, а треть - LG. Известно, что брак при производстве телевизоров фирмы Samsung составляет в среднем – 9%, фирмы LG – 3%, а фирмы Sony – 1%. Найдите вероятность того, что купленный телевизор бракован. Какова вероятность, что бракованный телевизор - Sony.

Решение:

Пусть события означают:

A – телевизор бракован;

$\bar{A}$ – телевизор не бракован.

Пусть гипотезы B_1, B_2 и B_3 означают соответственно, что телевизор марки Samsung, LG и Sony соответственно. Согласно условию задачи:

$p(B_1)=$____;

$p(B_2)=$____;

$p(B_3)=$____;

(контроль: $p(B_1)+p(B_2)+p(B_3)=1$ ______________________)

Запишем условные вероятности:

$p_{B_1}(A)=$____;

$p_{B_2}(A)=$____;

$p_{B_3}(A)=$____;

Вычислим вероятность того, что купленный телевизор бракован по формуле полной вероятности:

$p(A)=$____;

По формулам Байеса вычислим следующие вероятности:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$