Лекция 10
§1. Элементы теории матричных игр.
Матричные игры с нулевой суммой.

Теория игр занимается разработкой различного рода рекомендаций по принятию решений в условиях конфликтной ситуации. Формализуя конфликтные ситуации математически, их можно представить как игру двух, трех и более игроков, каждый из которых преследует цель максимизации своего выигрыша за счет другого игрока. Иногда теорию игр определяют как раздел математики, занимающийся выработкой оптимальных правил поведения для каждой стороны, участвующей в конфликтной ситуации. Совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий стороны в конкретной конфликтной ситуации, есть *стратегия*.

Под термином "игра" понимается совокупность предварительно оговоренных правил и условий, а термин "партия" связан с частичной возможной реализацией этих правил. Если n партнеров (игроков) P_1, P_2,…, P_n участвуют в данной игре, то основное содержание теории игр состоит в изучении следующей проблемы: как должен вести партию j-й партнер (j=1, n) для достижения наиболее благоприятного для себя исхода?

В дальнейшем предполагается, что в конце партии каждый игрок P_j получает сумму v_j, называемую выигрышем. При этом подразумевается, что каждый игрок руководствуется лишь целью максимизации общей суммы выигрыша. Числа v_j (j=1, n) могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Если $v_j>0$, то это соответствует выигрышу j-ro игрока, если $v_j<0$, — проигрышу, при $v_j=0$ — ничейный исход.

В большинстве случаев имеем игры с нулевой суммой, т. е. $v_1+v_2+\ldots+ v_n=0$. В этих играх сумма выигрыша переходит от одного партнера к другому, не поступая из внешних источников. Игра с нулевой суммой предусматривает, что сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю. Примерами игры с нулевой суммой служат многие экономические задачи. В них общая сумма выигрыша перераспределяется между игроками, но не меняется. В противном случае имеем игру с ненулевой суммой.

Игры, в которых участвуют два игрока, называются *парными*, а игры с большим числом участников — *множественными*. Принятие игроком того или иного решения в процессе игры и его реализация называется *ходом*. Ходы могут быть *личные* и *случайные*. Если ход выбирается сознательно, — это личный ход, а если с помощью механизма случайного выбора, — случайный ход.

Шахматы являются игрой двух партнеров с конечным числом личных ходов. В дальнейшем мы будем рассматривать игры двух партнеров с нулевой суммой и конечным числом возможных ходов. Такие игры математически глубоко проработаны и вызывают наибольший интерес, поскольку чаще используются в практических приложениях.

В зависимости от количества стратегий игры делятся на *конечные* и *бесконечные*. Так, в конечной игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, то игра называется бесконечной.

В зависимости от взаимоотношений игроков игры делятся на *кооперативные*, *коалиционные* и *бескоалиционные*. Если игроки не имеют права вступать в соглашения, то такая игра относится к бескоалиционным, если лее игроки могут вступать в соглашения, создавать коалиции, — к коалиционным. Кооперативная игра — это такая игра, в которой заранее определены коалиции.

В зависимости от вида функции выигрышей игры подразделяются на *матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные* и т.д. Мы будем рассматривать матричные игры.

В общем случае матричная игра задается прямоугольной матрицей размерности m×n. Номер i строки матрицы соответствует номеру стратегии A_i, применяемой игроком P_1.Номер j столбца соответствует стратегии B_j, применяемой игроком P_2. Описанная игра однозначно определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы является действительным числом и представляет собой сумму выигрыша, уплачиваемую игроком P_2 игроку P_1, если P_1 выбирает стратегию, соответствующую i-й строке, а P_2 выбирает стратегию, соответствующую j-му столбцу.

Матричную игру часто записывают в развернутой форме в виде таблицы, называемой платежной матрицей.

Каждый игрок выбирает для себя наиболее выгодную стратегию. При этом первый игрок стремится выбрать такую стратегию, которая доставляет ему максимальный выигрыш, тогда второй игрок выбирает стратегию, приводящую его к минимальному проигрышу. В этой связи вводят понятия нижней и верхней чистой цены игры.

Нижней чистой ценой игры (максимином) называется число α, определяемое по формуле:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Верхней чистой ценой игры (минимаксом) называется число β, определяемое по формуле:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Стратегии игроков, соответствующие максимину (минимаксу), называются *максиминными (минимаксными).*

Пример: Найти максиминную и минимаксную стратегии игроков в матричной игре:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max(-3;\quad 3;\quad 1;\quad 2) = 3$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min(5;\quad 7;\quad 8;\quad 9) = 5$$

В соответствиии с формулой по каждой строке определяем наименьшее число. Это означает, что, какой бы выбор по столбцам ни сделал игрок В, выигрыш игрока А, который свои стратегии выбирает по строкам, в худшем случае составит соответственно: -3, 3, 1, 2. Однако игроку А целесообразно выбрать такую стратегию (строку), для которой достигается максимальный выигрыш независимо от того, какой столбец выбрал игрок В. Максиминной стратегией игрока А является A_2. Аналогично, минимаксной стратегией игрока В является B_1.

§2. Чистые и смешанные стратегии и их свойства.

Различают стратегии чистые и смешанные. Чистая стратегия A_i (i=1, m) первого игрока (чистая стратегия B_j (j = 1, n) второго игрока) — это возможный ход первого (второго) игрока, выбранный им с вероятностью, равной 1.

Если первый игрок имеет m стратегий, а второй — n стратегий, то для любой пары стратегий первого и второго игроков чистые стратегии можно представить в виде единичных векторов.

Например, для пары стратегий A_1, B_3 чистые стратегии первого и второго игроков запишутся в виде: p_1=(1; 0; 0; …; 0) и q_3=(0; 0; 1; …; 0).

Теорема: В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры, т.е. $\alpha \le \beta$.

Если для чистых стратегий A_i, B_j игроков А и В соответственно имеет место равенство $\alpha=\beta$, то пару чистых стратегий (A_i, B_j) называют седловой точкой матричной игры,

элемент a_{ij} матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, — седловым элементом платежной матрицы, а число $\nu=\alpha=\beta$ — чистой ценой игры.
Пример: Найти нижнюю и верхнюю чистые цены, установить наличие седловых точек матричной игры

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max(5; \quad 1; \quad 0) = 5$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min(9; \quad 5; \quad 6; \quad 8) = 5$$

В данном случае имеем одну седловую точку (A_1; B_2), а седловой элемент равен 5. Этот элемент является наименьшим в 1-й строке и наибольшим во 2-м столбце. Отклонение игрока А от максиминной стратегии A_1 ведет к уменьшению его выигрыша, а отклонение игрока В от минимаксной стратегии B_2 ведет к увеличению его проигрыша. Иными словами, если в матричной игре имеется седловой элемент, то наилучшими для игроков являются их минимаксные стратегии. И эти чистые стратегии, образующие седловую точку и выделяющие в матрице игры седловой элемент $a_{12}=5$, есть оптимальные чистые стратегии A^*_1 и B^*_2 соответственно игроков А и В.

Если же матричная игра не имеет седловой точки, то решение игры затрудняется. В этих играх $\alpha<\beta$. Применение минимаксных стратегий в таких играх приводит к тому, что для каждого из игроков выигрыш не превышает α, а проигрыш — не меньше β. Для каждого игрока возникает вопрос увеличения выигрыша (уменьшения проигрыша). Решение находят, применяя смешанные стратегии.

Смешанной стратегией первого (второго) игрока называется вектор $p=(p_1; \dots ; p_m)$, где $p_i\geq 0$ ($i= 1, m$) $\Sigma p_i=1$ ($q=(q_1; \dots ; q_n)$, где $p_j\geq 0$ ($j= 1, n$) $\Sigma p_j=1$).
Вектор p (q) означает вероятность применения i-й чистой стратегии первым игроком (j-й чистой стратегии вторым игроком).
Поскольку игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга, игра имеет случайный характер и случайной становится величина выигрыша (проигрыша). В таком случае средняя величина выигрыша (проигрыша) — математическое ожидание — является функцией смешанных стратегий p, q:

$$f(p; \quad q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

Функция f(p, q) называется платежной функцией игры с матрицей $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$.
Стратегии $p^*=(p^*_1; \dots ; p^*_m)$, $q^*=(q^*_1; \dots ; q^*_n)$ называются оптимальными, если для произвольных стратегий $p=(p_1; \dots ; p_m)$, $q=(q_1; \dots ; q_n)$ выполняется условие $f(p, q^*)\leq f(p^*, q^*)\leq f(p^*, q)$
Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии p, второму игроку — проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии q.
Совокупность оптимальных стратегий и цены игры составляет решение игры.
Значение платежной функции при оптимальных стратегиях определяет цену игры ν, т. е. $f(p^*,q^*)=\nu$.
<u>Теорема:</u> В смешанных стратегиях любая конечная матричная игра имеет седловую точку.
<u>Теорема:</u> Для того чтобы смешанные стратегии $p^*=(p^*_1; \dots ; p^*_m)$, $q^*=(q^*_1; \dots ; q^*_n)$ были оптимальными для игроков А и В в игре с матрицей $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$ и выигрышем ν, необходимо и

достаточно выполнения неравенств:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p^*_i \ge \upsilon \quad \left(j = \overline{1, n}\right); \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q^*_j \le \upsilon \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$$

На основании теоремы можно сделать вывод: если игрок A применяет оптимальную смешанную стратегию p*, а игрок B — любую чистую стратегию B_j, то выигрыш игрока A будет не меньше цены игры ν. Аналогично: если игрок B использует оптимальную смешанную стратегию q*, а игрок A — любую чистую стратегию A_i, то проигрыш игрока B не превысит цены игры ν.

Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются активными стратегиями игрока.

<u>Теорема:</u> Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

На основании данной теоремы решение матричной игры можно упростить, выявив при этом доминирование одних стратегий над другими. Так, рассматривая стратегии игрока A, сравниваем элементы строк s и t, а именно: a_{sj} с элементами a_{tj} для $j = \overline{1, n}$. Если $a_{sj} \ge a_{tj}$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$, то выигрыш игрока A при стратегии A_s будет больше, чем при стратегии A_t. В этом случае стратегия A_s доминирует над стратегией A_t. Стратегию A_s называют доминирующей, а стратегию A_t - доминируемой.

Поскольку игрок B заинтересован в минимизации проигрыша, доминирующим будет столбец с наименьшими элементами. Например, сравниваем элементы r-го и l-го столбцов. Если $a_{ir} \ge a_{il}$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$, то игроку B свой выбор выгодно сделать по l-му столбцу. В этом случае стратегия B_l доминирует над стратегией B_r. Стратегию B_l называют доминирующей, а стратегию B_r - доминируемой.

Если в матричной игре имеем строки (столбцы) с одними и теми же элементами, то строки (столбцы), а соответственно и стратегии игроков A и B называются дублирующими.

В матричной игре доминируемые и дублирующие строки (столбцы) можно опускать, что не влияет на решение игры.

<u>Теорема:</u> Оптимальные смешанные стратегии p* и q* соответственно игроков A и B в матричной игре $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ с ценой ν будут оптимальными и в матричной игре $\lfloor b a_{ij} + c \rfloor_{m \times n}$ с ценой ν′=bν+c, где b>0.

На основании теоремы платежную матрицу, имеющую отрицательные числа, можно преобразовать в матрицу с положительными числами.

Пример: Выполнить всевозможные упрощения матричной игры

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|cc|ccc|} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 3 & 5 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} (+2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

§3. Приведение Матричной игры к ЗЛП.

Пусть имеем игру с матрицей $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$. Обозначим через p*=($p_1$; ... ; p_m), q*=(q_1; ... ; q_n) оптимальные смешанные стратегии игроков A и B.

Стратегия p* игрока A гарантирует ему выигрыш не меньше ν, независимо от выбора стратегии B_j игроком B, то есть

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geq \upsilon \quad j = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\ p_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Стратегия q* игрока B гарантирует ему проигрыш не больше ν, независимо от выбора стратегии A_i игроком A, то есть

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \leq \upsilon \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \\ q_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Поскольку элементы платёжной матрицы всегда можно сделать положительными, то и цена игры ν>0. Пусть: $p_i/\nu=x_i$, $q_j/\nu=y_j$ ($i = \overline{1, m}$ $j = \overline{1, n}$).

Так как игрок A стремится максимизировать цену игры ν, то обратная величина 1/ν будет минимизироваться. Оптимальная смешанная стратегия игрока A определяется решением ЗЛП: найти минимальное значение функции $f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i$ при условиях ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq 1 \quad j = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{\upsilon} \\ x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Так как игрок B стремится минимизировать цену игры ν, то обратная величина 1/ν будет максимизироваться. Оптимальная смешанная стратегия игрока B определяется решением ЗЛП: найти максимальное значение функции $f(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j$ при условиях ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq 1 \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\upsilon} \\ y_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Решив пару двойственных задач, определяем:

$$\upsilon = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*}; \quad p_i = \frac{x_i^*}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*}; \quad q_j = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*}$$

§4. Игры с природой.

Управление производственными процессами осуществляется путем реализации последовательности принимаемых решений. Для этого необходима информация о состоянии объекта управления в условиях его работы. В случае отсутствия достаточно полной информации возникает неопределенность в принятии решения. Существование неустранимой неопределенности связано со случайным характером многих явлений.

С целью уменьшения неблагоприятных последствий в каждом конкретном случае следует учитывать степень риска и имеющуюся информацию. И здесь *лицо, принимающее решение* (ЛПР), вступает в игровые отношения с некоторым абстрактным лицом, которое условно можно назвать *"природой".* Иными словами, ЛПР должно уметь находить управленческое решение, когда природа не выбирает сознательно свои оптимальные стратегии. Вместе с тем мы иногда располагаем некоторыми вероятностными характеристиками состояния природы. Такого рода ситуации принято называть *играми с природой.*

Любую хозяйственную деятельность человека можно рассматривать как игру с природой. В широком смысле под "природой" будем понимать совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений.

Задачей экономиста или ЛПР является принятие наилучшего управленческого решения в каждой конкретной ситуации. Качество принимаемого решения зависит от информированности ЛПР о ситуации, в которой принимается решение. Безразличие природы к результату игры (выигрышу) и возможность получения экономистом (статистиком) или ЛПР дополнительной информации о ее состоянии отличают игру с природой от обычной матричной игры, в которой принимают участие два сознательных игрока. Игры с природой представляют собой основную модель теории принятия решений в условиях частичной неопределенности.

Множество состояний природы обозначим через П, отдельное состояние — $П_j$, $П_j \in П$ ($j = \overline{1, n}$). Множество решений (стратегий) статистика обозначим через А, отдельное решение — A_i, $A_i \in A$ ($i = \overline{1, m}$).

Если на множествах состояний природы П и решений статистика А потребуется определить распределение вероятностей, то необходимо производить эксперимент, целью которого будет нахождение распределения некоторой случайной переменной, зависящей от состояния природы.

Для i-го решения A_i ЛПР А и j-го состояния природы $П_j$ имеем некоторое число, обозначающее функцию потерь $L(A_i, П_j)$, которая, как правило, является случайной переменной.

Во взаимоотношениях с природой ЛПР может использовать любые из стратегий $A_1,..., A_m$, в зависимости от состояний $П_j$ природы. Имея ряд стратегий $A_1,..., A_m$, ЛПР должен руководствоваться некоторым правилом поведения, с помощью которого он определяет, какую стратегию A_i, $A_i \in A$ ему выбрать. ЛПР отыскивает оптимальное поведение, которое и будет его оптимальной стратегией. При этом он может пользоваться как чистыми, так и смешанными стратегиями.

Чтобы выразить в количественной форме упомянутое выше некоторое правило поведения ЛПР, которым он должен руководствоваться, предположим, что есть возможность численно оценить величиной a_{ij} эффективность каждой комбинации (A_i, $П_j$), иначе говоря, качество решения A_i. Тем самым будет определена так называемая платежная матрица игры с природой $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ на основе которой в дальнейшем и будут сформулированы "правила поведения" — критерии выбора оптимальной стратегии ЛПР.

Элемент a_{ij} назовем выигрышем ЛПР, если он использует стратегию A_i при состоянии природы $П_j$.
Решение игры с природой несколько отличается от решения обычной матричной игры, где оба игрока ведут игру сознательно. Отличие состоит прежде всего в упрощении игры. Выявление дублирующих и доминируемых стратегий производится только для стратегий ЛПР. Стратегии природы нельзя опускать, поскольку она не имеет "умысла" навредить ЛПР, более того, она может реализовать состояния, заведомо выгодные ЛПР. Иногда при решении игры с природой используется матрица рисков. Элементы r_{ij} матрицы рисков равны разности между максимально возможным выигрышем и тем выигрышем, который ЛПР получит в тех же условиях $П_j$, применяя стратегию A_i, т. е. $r_{ij}=\beta_j-\alpha_{ij}$, где $\beta_j=\max a_{ij}$. Оптимальную стратегию статистика можно определить, используя ряд критериев.

§5. Критерий для принятия решений в играх с природой.

Если вероятности состояний природы неизвестны:

1) ***Максиминный критерий Вальде:***

Рекомендуется выбирать максиминную стратегию, позволяющую получать нижнюю чистую цену α в парной игре с нулевой суммой. По критерию Вальде за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека образом. Он достигается из условия:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

2) ***Критерий минимального риска Сэвиджа:***

Рекомендуется выбирать такую стратегию, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают, какой убыток понесёт игрок, если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии. Критерий рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека образом. Он достигается из условия:

$$\min_i \max_j r_{ij}$$

Элементы матрицы рисков равны разности между максимально возможным выигрышем и тем выигрышем, который можно получить в тех же условиях $П_j$, применяя стратегию A_i и находятся по формуле:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} = b_j - a_{ij}.$$

3) ***Критерий максимума:***

Рекомендуется выбирать максимальную стратегию, позволяющую получать максимум выигрыша. Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет действовать наилучшим для человека образом. Он достигается из условия:

$$\alpha = \max_i \max_j a_{ij}$$

4) ***Критерий Гурвица:***

Рекомендуется выбирать такую стратегию, для которой выполняется соотношение:

$$\max_i\left(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij}\right)$$

Критерий является пессимистически-оптимистическим. Он достигается из условия:
λ - степень оптимизма;

при λ=0 имеем критерий крайнего оптимизма –критерий максимума; при λ=1 имеем критерий крайнего пессимизма Вальда; при 0<λ<1 имеем нечто среднее; при желании подстраховаться λ принимают близким к 1.

Если вероятности состояний природы известны:

5) ***Критерий Байеса:***

• Рекомендуется выбирать за оптимальную стратегию ту чистую стратегию, при которой максимизируется средний выигрыш. Он достигается из условия:

$$\bar{\alpha} = \max_i \bar{a}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \quad i = \overline{1, m}$$

• Рекомендуется выбирать за оптимальную стратегию ту чистую стратегию, при которой минимизируется средний риск. Он достигается из условия:

$$\bar{r} = \min_i \bar{r}_i = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \quad i = \overline{1, m} \quad \text{где} \quad r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} = b_j - a_{ij}$$

Отметим, что каждый из рассмотренных критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для окончательного выбора решений, однако их совместный анализ позволяет более наглядно представить последствия принятия тех или иных решений.

Определить оптимальную чистую стратегию и оценить выигрыш игрока Т в игре заданной матрицей, представленной в таблице.

$T_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$
T_1	1,2	1,6	0,8
T_2	1,4	1,3	1,2
T_3	1,3	1,2	1,1

Решение:

$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ - нижняя цена игры (максимин); α=max(0,8; 1,2; 1,1)=1,2

$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ - верхняя цена игры (минимакс); β=min(1,4; 1,6; 1,2)=1,2

Цена игры υ=1,2.

1) ***Критерий Вальде:***

$T_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	min a_{ij}
T_1	1,2	1,6	0,8	0,8
T_2	1,4	1,3	1,2	1,2
T_3	1,3	1,2	1,1	1,1

max(min a_{ij})=max(0,8; 1,2; 1,1)=1,2, итак, целесообразно использовать стратегию T_2.

2) ***Критерий Сэвиджа:***

$T_i \backslash П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	max a_{ij}-a_{ij}
T_1	1,2/0,2	1,6/0	0,8/0,4	0,4
T_2	1,4/0	1,3/0,3	1,2/0	0,3
T_3	1,3/0,1	1,2/0,4	1,1/0,1	1,4
β_j	1,4	1,6	1,2	

Матрица рисков имеет вид: $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

min{max(maxa_{ij}-a_{ij})}=min(0,4; 0,3; 0,4)=0,3, итак, целесообразно использовать стратегию T_2.

3) Критерий Максимума:

T_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	max a_{ij}
T_1	1,2	1,6	0,8	1,6
T_2	1,4	1,3	1,2	1,4
T_3	1,3	1,2	1,1	1,3

max(max a_{ij})=max(1,6; 1,4; 1,3)=1,6, итак, целесообразно использовать стратегию T_1.

4) Критерий Гурвица:

T_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	min a_{ij}	λmin a_{ij}	max a_{ij}	$(1-\lambda)$max a_{ij}	λmin $a_{ij}+(1-\lambda)$max a_{ij}
T_1	1,2	1,6	0,8	0,8	0,48	1,6	0,64	1,12
T_2	1,4	1,3	1,2	1,2	0,72	1,4	0,56	1,28
T_3	1,3	1,2	1,1	1,1	0,66	1,3	0,52	1,18

при λ=0,6 max(λmin $a_{ij}+(1-\lambda)$max a_{ij})=max(1,12; 1,28; 1,18)=1,28, итак, целесообразно использовать стратегию T_2.

Предприятие общественного питания планирует выпуск трёх партий, ранее не производимых полуфабрикатов $П_1$, $П_2$, $П_3$, в условиях неясной рыночной конъюнктуры, относительно которой известны лишь отдельные возможные состояния P_1, P_2, P_3, P_4, а также возможные объёмы товарооборота по каждому варианту, и их условные вероятности, которые представлены в виде P_{ij} матрицы. Определить предпочтительный план выпуска полуфабрикатов.

Партии полуфабрикатов	**Объём товарооборота при различных состояниях рыночной конъюнктуры**			
	P_1	**P_2**	**P_3**	**P_4**
$П_1$	0,3 **1,2**	0,2 **2,1**	0,1 **1,7**	0,4 **2,0**
$П_2$	0,4 **0,5**	0,1 **1,3**	0,2 **1,6**	0,3 **1,8**
$П_3$	0,2 **1,7**	0,3 **1,6**	0,2 **1,9**	0,3 **1,4**

Решение:

1) Для выбора оптимального плана находим для каждого вида математическое ожидание выигрыша:

Партии полуфабрикатов	Объём товарооборота при различных состояниях рыночной конъюнктуры				Значения среднего риска $M(r_i)$
	P_1	P_2	P_3	P_4	
$П_1$	0,3 1,2	0,2 2,1	0,1 1,7	0,4 2,0	1,2·0,3+2,1·0,2+1,7·0,1+2,0·0,4= 1,75
$П_2$	0,4 0,5	0,1 1,3	0,2 1,6	0,3 1,8	0,5·0,4+1,3·0,1+1,6·0,2+1,8·0,3= 1,19
$П_3$	0,2 1,7	0,3 1,6/	0,2 1,9	0,3 1,4	1,7·0,2+1,6·0,3+1,9·0,2+1,4·0,3= 1,62
					$\bar{\alpha}_k$=max(a_i)=1,75

А затем определим максимальное значение этого показателя, которое и указывает на

оптимальное решение:
$\max M(\Pi_i)=M(\Pi_1)=1,75$.
Следовательно, наиболее выгодно производить полуфабрикаты Π_1.

2) Найдём для задачи все значения рисков – матрицу рисков:

Партии полуфабрикатов	Объём товарооборота при различных состояниях рыночной конъюнктуры				Значения среднего риска $M(r_i)$
	P_1	P_2	P_3	P_4	
Π_1	0,3 1,2/0,5	0,2 2,1/0	0,1 1,7/0,2	0,4 2,0/0	$0,5\cdot 0,3+0\cdot 0,2+0,2\cdot 0,1+0\cdot 0,4=$ 0,17
Π_2	0,4 0,5/1,2	0,1 1,3/0,8	0,2 1,6/0,3	0,3 1,8/0,2	$1,2\cdot 0,4+0,8\cdot 0,1+0,3\cdot 0,2+0,2\cdot 0,3=$ 0,68
Π_3	0,2 1,7/0	0,3 1,6/0,5	0,2 1,9/0	0,3 1,4/0,6	$0\cdot 0,2+0,5\cdot 0,3+0\cdot 0,2+0,6\cdot 0,3=$ 0,33
β_j	1,7	2,1	1,9	2,0	$r_k=\min(r_i)=0,17$

А затем определим минимальное значение этого показателя, которое и указывает на оптимальное решение:
$\min r_i=\min(0,17;\ 0,68;\ 0,33)=0,17$.
Следовательно, оптимальная стратегия Π_1 при которой достигается максимум среднего выигрыша и минимум среднего риска.