Лекция 9
§1. Транспортная задача.

Транспортная задача (ТЗ) формулируется следующим образом:
В m пунктах отправления $A_1,\dots, A_m$ сосредоточен однородный груз в количествах соответственно $a_1,\dots, a_m$ единиц. Имеющийся груз необходимо доставить потребителям $B_1,\dots, B_n$, спрос которых выражается величинами $b_1,\dots, b_n$ единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из i-го $(i=1,m)$ пункта отправления в j-й $(j=1,n)$ пункт назначения. Требуется составить план перевозок, который полностью удовлетворяет спрос потребителей в грузе, и при этом суммарные транспортные издержки минимизируются.
Для построения экономико-математической модели ТЗ рассмотрим матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

где x_{ij} $(i=1, m;\ j=1, n)$ обозначает количество единиц груза, которое необходимо доставить из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Определение 1. Матрицу $X=[x_{ij}]_{m\times n}$ будем называть *матрицей перевозок.* Предполагается, что все $x_{ij} \geq 0$.

Определение 2. Удельные транспортные издержки (расходы) запишем в форме матрицы $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ и назовем ее *матрицей тарифов.*

Определение 3. Для наглядности условия ТЗ можно представить таблицей, которую будем называть *распределительной.* Распределительную таблицу называют иногда *табличной* или *матричной моделью* ТЗ.

Поставщик	Потребитель					Запас груза
	B_1	B_2	B_3	…	B_n	a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	… …	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	… …	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	… …	… …	… …	… …	… …	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	… …	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе b_i	b_1	b_2	b_3	…	b_n	

Экономико-математическая модель ТЗ должна отражать все условия и цель задачи в математической форме. Так, переменные x_{ij} $(i=1, m;\ j=1, n)$ должны удовлетворять ограничениям по запасам, потребностям и условиям неотрицательности. В математической форме эти условия можно записать так:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & \left(i = \overline{1, m}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \left(j = \overline{1, n}\right) \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$$

Цель ТЗ — минимизировать общие затраты на реализацию плана перевозок, которые можно представить функцией

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$$

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Итак, математически ТЗ ставится так. Даны система ограничений при условии неотрицательности и линейная функция. Требуется среди множества решений системы найти такое неотрицательное решение, при котором линейная функция принимает минимальное значение (минимизируется).

Определение 4. Будем называть план перевозок $X=[x_{ij}]_{m \times n}$ допустимым, если он удовлетворяет ограничениям системы и условиям неотрицательности.

Определение 5. Допустимый план перевозок, доставляющий минимум целевой функции, называется оптимальным.

Теорема: (о существовании допустимого плана). Для того чтобы ТЗ имела допустимые планы, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

§2. Закрытая и открытая модели транспортной задачи.

Определение 1. Модель ТЗ называют закрытой, если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей, т. е. выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Определение 2. Если для ТЗ выполняется одно из условий:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j; \quad \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то модель задачи называют открытой.

Для разрешимости ТЗ с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую.

Так, при выполнении первого условия необходимо ввести фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения B_{n+1}, т.е. в матрице задачи предусматривается дополнительный столбец. Спрос фиктивного потребителя полагают равным небалансу, т.е.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

а все тарифы — одинаковыми, равными нулю, т.е. $c_{i,n+1}=0$ $(i=1, m)$.

Аналогично при выполнении второго условия вводится фиктивный (m+1)-й пункт отправления A_{m+1}, запас груза у которого равен небалансу, т.е.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i ,$$

а все тарифы — одинаковыми, равными нулю, т.е. $c_{m+1,j}=0$ $(j=1, n)$.

При преобразовании открытой задачи в закрытую целевая функция не меняется, так как все слагаемые, соответствующие дополнительным перевозкам, равны нулю.

Теорема (о ранге матрицы) Ранг матрицы A ТЗ не единицу меньше числа уравнений: $r(A)=m+n-1$.

§3. Построение исходного опорного плана.

Построение опорных планов, а также преобразование их будем производить непосредственно в распределительной таблице.

Если в плане перевозок переменная x_{ik} равна некоторому числу $a\neq0$, то это число записываем в соответствующую клетку (i; k) и считаем ее занятой (или базисной), если же x_{ik} =0, то клетку (i; k) оставляем свободной. При этом число занятых опорным планом клеток в соответствии с теоремой о ранге матрицы должно быть равно $m+n$-1, а остальные клетки будут свободными.

Метод ***"северо-западного угла"***. Будем распределять груз, начиная с загрузки левой верхней, условно называемой северо-западной, клетки A_1B_1, двигаясь затем от нее по строке вправо или по столбцу вниз. В клетку A_1B_1 занесем меньшее из чисел a_1, b_1, т.е. $x_{11}=\min\{a_1, b_1\}$.

Если $a_1>b_1$, то $x_{11}=b_1$ и первый потребитель B_1 будет полностью удовлетворен. В дальнейшем первый столбец таблицы в расчет не принимается, то есть выходит из рассмотрения.

Двигаясь вправо по первой строке таблицы, заносим в соседнюю клетку A_1B_2 меньшее из чисел a_1-b_1, и b_2, т.е. $x_{12}=\min\{a_1-b_1, b_2\}$. Заполнив таким образом клетку A_1B_2, переходим к загрузке следующей клетки по второй строке либо по второму столбцу. Процесс распределения по второй, третьей и последующим строкам (столбцам) производится аналогично распределению по первой строке или первому столбцу до тех пор, пока не исчерпаются ресурсы. Последней заполняется клетка A_mB_n.

Метод ***"минимального элемента"***. Просматриваются тарифы из распределительной таблицы, и в первую очередь заполняется клетка с минимальным значением тарифа. При этом в клетку записывается максимально возможное значение поставки. Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. После этого из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом. Процесс распределения заканчивается, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а спрос потребителей полностью удовлетворен. В результате получаем опорный план, который должен содержать m+n-1 загруженных клеток. В процессе заполнения таблицы могут быть одновременно исключены строка и столбец. Так бывает, когда полностью исчерпывается запас груза и полностью удовлетворяется спрос (вырожденная задача). В этом случае в свободные клетки надо записать число 0 — "нуль-загрузку", условно считая такую клетку занятой. Однако число 0 записывается в те свободные клетки, которые не образуют циклов с ранее занятыми клетками.

Метод Фогеля. В распределительной таблице по строкам и столбцам определяется разность между двумя наименьшими тарифами. Отмечается наибольшая разность знаком . Далее в строке (столбце) с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Строки (столбцы) с нулевым остатком груза в дальнейшем в расчет не принимаются. На каждом этапе загружается только одна клетка. Распределение груза производится, как и ранее.

Теорема: Если план $X=[x_{ij}]_{m\times n}$ ТЗ является оптимальным, то ему соответствует система из m+n чисел α_i, β_j, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_i+\beta_j=c_{ij}, \text{ для } x_{ij}>0$$
$$\alpha_i+\beta_j\le c_{ij}, \text{ для } x_{ij}=0$$
$$(i=1,\ m;\ j=1,\ n)$$

Числа α_i и β_j называются потенциалами соответственно i-го поставщика и j-го потребителя.

Из теоремы следует, что для оптимального плана ТЗ необходимо выполнение условий:

1) каждой занятой клетке в распределительной таблице соответствует сумма потенциалов, равная тарифу этой клетки, т.е. $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$;
2) каждой свободной клетке соответствует сумма потенциалов, не превышающая тарифа этой клетки, т. е. $\alpha_i+\beta_j\le c_{ij}$.

§4. Метод потенциалов.

В соответствии с введенным понятием потенциалов и с учетом связей между моделями двойственных задач каждому поставщику (ограничению по запасам) поставим в соответствие потенциал α_i $(i=1,\ m)$, а каждому потребителю (ограничению по спросу) - потенциал β_j $(j=1,\ n)$.

Согласно теореме о потенциалах, каждой занятой клетке будет соответствовать $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$. Так как всех занятых клеток должно быть $m+n$-1, т. е. на единицу меньше числа потенциалов, то для определения чисел α_I и β_j необходимо решить систему из $m+n$-1 уравнений с $m+n$ неизвестными. Система неопределенная, и, чтобы найти частные решения, одному из потенциалов придаем произвольное числовое значение, тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Пусть $\alpha_1=0$.
Для исследования плана на оптимальность по каждой свободной клетке проверяется условие $\alpha_i+\beta_j\le c_{ij}$ (или $c_{ij}-(\alpha_i+\beta_j)\ge 0$). Если хотя бы одна свободная клетка не удовлетворяет данному условию, то опорный план не является оптимальным, его можно улучшить за счет загрузки этой клетки. Если таких клеток несколько, то наиболее перспективной для загрузки является клетка, для которой разность (оценка) между тарифом клетки и суммой потенциалов наименьшая.
Итак, если для опорного плана перевозок указанное условие оптимальности не выполняется, то за счет загрузки свободной клетки с отрицательной оценкой план перевозок улучшается. Для наиболее перспективной свободной клетки строится замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Вершинам этого цикла условно приписываются знаки: свободной клетке — плюс, следующей по часовой или против часовой стрелки занятой клетке — минус, следующей — снова плюс и т.д. Из поставок в клетках цикла с "отрицательными" вершинами выбирается наименьшее количество λ груза, которое и перемещается по клеткам этого цикла: прибавляется к поставкам в положительных вершинах и вычитается из поставок в отрицательных вершинах, в результате чего баланс цикла не нарушится.

В общем случае цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, состоящую из звеньев, пересекающихся под прямым углом. Каждое звено соединяет две клетки строки (столбца). Цикл включает одну свободную клетку, остальные клетки цикла заняты, В цикле всегда четное число клеток. Для свободной клетки всегда можно построить единственный цикл. Если из занятых клеток образуется цикл, то план перевозок не является опорным. Цикл строится лишь для свободной клетки.

Сформулируем алгоритм решения ТЗ методом потенциалов:

1) построить опорный план по одному из правил;
2) вычислить потенциалы поставщиков и потребителей α_i, β_j, *(i=1, m; j=1, n)*, решив систему уравнений вида: $\alpha_i+\beta_j\leq c_{ij}$, полагая, что $\alpha_1=0$;
3) вычислить оценки Δ_{ij} для всех свободных клеток по формуле $\Delta_{ij}=c_{ij}-(\alpha_i+\beta_j)\geq 0$. Если все $\Delta_{ij}\geq 0$, то полученный план является оптимальным. При этом если все $\Delta_{ij}>0$, то полученный оптимальный план единственный. В случае, если хотя бы одна оценка $\Delta_{ij}=0$, имеем бесчисленное множество оптимальных планов с одним и тем же значением целевой функции. В случае, если хотя бы одна оценка $\Delta_{ij}<0$, то полученный опорный план не оптимальный и переходим к его улучшению;
4) для клетки с максимальной по модулю отрицательной оценкой свободной клетки построим цикл перераспределения груза, а далее переходим ко второму и третьему пунктам.

Пример

В пунктах A_1, A_2, A_3 производится однородная продукция в количествах a_1=750, a_2=200, a_3=550 единиц. Готовая продукция поставляется в пункты B_1, B_2, B_3, B_4, потребности которых составляют b_1=450, b_2=300, b_3=350, b_4 =250 единиц. Стоимость c_{ij} перевозок единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j задана матрицей c_{ij}:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Требуется:

1. **методом минимального элемента определить опорный план задачи;**
2. **методом потенциалов найти план перевозок продукции, при котором минимизируются суммарные затраты по доставке потребителям;**
3. **определить суммарные затраты на перевозку продукции при оптимальном плане.**

Решение:

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

Σa_i=750+200+550=1500 Σb_j=450+300+350+250=1350

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения не равна запасам груза в пунктах отправления, следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Для того, чтобы задача была закрытой введём фиктивного потребителя B_5 с потребностью 150 единиц груза (1500-1350=150), при этом стоимости c_{ij} перевозок единицы продукции из пунктов A_i в пункты B_5 будем считать равными нулю.

Занесем исходные данные в распределительную таблицу:

план I	B_1 450	B_2 300	B_3 350	B_4 250	B_5 150
A_1 750	[1] 450	[6] -	[5] 50	[3] 250	[0] -
A_2 200	[4] -	[3] 200	[6] -	[7] -	[0] -
A_3 550	[5] -	[8] 100	[10] 300	[4] -	[0] 150

Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи.

Среди тарифов из всей таблицы наименьшим является c_{11}=1 (нулевые тарифы фиктивного потребителя будем рассматривать в последнюю очередь), поэтому в клетку A_1B_1 направляем максимально возможный груз. Он равен min{750, 450}=450. Тогда x_{11}=450 и из пункта A_1 не вывезено 300 ед. груза, а потребность в грузе пункта B_1 удовлетворена полностью. Таким образом, стобец B_1 выходит из рассмотрения. Далее аналогично, из оставшихся тарифов наименьшим является $c_{22}=c_{14}$=3, поэтому в клетку A_1B_4 направляем максимально возможный груз. Он равен min{300, 250}=250. Тогда x_{14}=250 и из пункта A_1 не вывезено груза 50 единиц, а потребность пункта B_4 удовлетворена полностью. Таким образом, столбец B_4 выходит из рассмотрения. Далее аналогично,

$c_{22}=3$ – min $\Rightarrow$ x_{22}= min{200, 300}=200;

$c_{13}=5$ – min $\Rightarrow$ x_{13}= min{50, 350}=50;

$c_{32}=8$ – min $\Rightarrow$ x_{32}= min{100, 300}=100;

x_{33}= min{450, 300}=300;

x_{35}= min{150, 150}=150;

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из пунктов A_i в пункты B_j вывезены, потребность пунктов B_j удовлетворена, а

план соответствует системе ограничений транспортной задачи.
Определяем значение целевой функции первого опорного плана.
$F(X_1)=450\cdot1+50\cdot5+250\cdot3+200\cdot3+100\cdot8+300\cdot10+150\cdot0=5850$
Проверим оптимальность опорного плана I методом потенциалов.
Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, как и должно быть m+n-1=5+3-1=7. Следовательно, опорный план I является невырожденным. Найдем потенциалы α_i, β_j по занятым клеткам таблицы, в которых $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$, полагая, что $\alpha_1=0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1+\beta_1 = 1 \\ \alpha_1+\beta_3 = 5 \\ \alpha_1+\beta_4 = 3 \\ \alpha_2+\beta_2 = 3 \\ \alpha_3+\beta_2 = 8 \\ \alpha_3+\beta_3 = 10 \\ \alpha_3+\beta_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_3 = 5 \\ \beta_4 = 3 \\ \alpha_3 = 5 \\ \beta_2 = 3 \\ \beta_5 = -5 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Занесем найденные значения потенциалов в таблицу и вычислим оценки свободных клеток по формуле: $\Delta_{ij}=c_{ij}-(\alpha_i+\beta_j)$

план I	B_1 150	B_2 300	B_3 50	B_4 400	B_5 100	потенциалы α_i
A_1 450	1 450	6 -	+ 5 50	- 3 250	0 -	$\alpha_1=0$
A_2 200	4 -	3 200	5 -	7 -	0 -	$\alpha_2=0$
A_3 350	5 -	8 100	- 10 300	+ 4 -	0 150	$\alpha_3=5$
b_j	$\beta_1=1$	$\beta_2=3$	$\beta_3=5$	$\beta_4=3$	$\beta_5=-5$	

$\Delta_{12}=6-(0+3)=3$; $\Delta_{15}=0-(0-5)=5$; $\Delta_{21}=4-(0+1)=3$; $\Delta_{23}=5-(0+5)=0$;
$\Delta_{24}=7-(0+3)=4$; $\Delta_{25}=0-(0-5)=5$; $\Delta_{31}=5-(5+1)=-1$; $\Delta_{34}=4-(5+3)=-4$
Первый опорный план I не является оптимальным, так как среди оценок свободных клеток есть отрицательные: $\Delta_{31}=-1$ и $\Delta_{34}=-4$, поэтому переходим к его улучшению. Выбираем максимальную по модулю оценку свободной клетки $\Delta_{34}=-4$. Для клетки A_3B_4 с отрицательной оценкой свободной клетки построим цикл перераспределения груза: A_3B_4 - A_1B_4 - A_1B_3 – A_3B_3 – A_3B_4. Для этого в перспективную клетку A_3B_4 поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-». Из чисел, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, то есть $\gamma_1=\min\{250, 300\}=250$. Прибавляем $\gamma_1=250$ к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках, и вычитаем $\gamma_1=250$ из объемов грузов, стоящих в минусовых клетках. В результате получен новый опорный план II.

план II	B_1 150	B_2 300	B_3 50	B_4 400	B_5 100	потенциалы α_i
A_1 450	- 1 450	6 -	+ 5 300	3 -	0 -	$\alpha_1=0$
A_2 200	4 -	3 200	5 -	7 -	0 -	$\alpha_2=0$
A_3 350	+ 5 -	8 100	- 10 50	4 250	0 150	$\alpha_3=5$
b_j	$\beta_1=1$	$\beta_2=3$	$\beta_3=5$	$\beta_4=-1$	$\beta_5=-5$	

Определяем значение целевой функции второго опорного плана.
$F(X_2)=F(X_1)+\Delta_{34}\gamma_1=5850-4\cdot 250=4850$
Проверим оптимальность опорного плана II методом потенциалов.
Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, как и должно быть m+n-1=5+3-1=7.
Следовательно, опорный план II является невырожденным.
Найдем потенциалы α_i, β_j по занятым клеткам таблицы, в которых $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$, полагая, что $\alpha_1=0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_1+\beta_1=1 \\ \alpha_1+\beta_3=5 \\ \alpha_2+\beta_2=3 \\ \alpha_3+\beta_2=8 \\ \alpha_3+\beta_3=10 \\ \alpha_3+\beta_4=4 \\ \alpha_3+\beta_5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \beta_1=1 \\ \beta_3=5 \\ \alpha_3=5 \\ \beta_4=-1 \\ \beta_5=-5 \\ \beta_2=3 \\ \alpha_2=0 \end{cases}$$

Занесем найденные значения потенциалов в таблицу и вычислим оценки свободных клеток по формуле: $\Delta_{ij}=c_{ij}-(\alpha_i+\beta_j)$
$\Delta_{12}=6-(0+3)=3$; $\Delta_{14}=3-(0-1)=4$; $\Delta_{15}=0-(0-5)=5$; $\Delta_{21}=4-(0+1)=3$;
$\Delta_{23}=5-(0+5)=0$; $\Delta_{24}=7-(0-1)=8$; $\Delta_{25}=0-(0-5)=5$; $\Delta_{31}=5-(5+1)=-1$
Второй опорный план II не является оптимальным, так как среди оценок свободных клеток есть отрицательная: $\Delta_{31}=-1$, поэтому переходим к его улучшению. Для клетки A_3B_1 с отрицательной оценкой свободной клетки построим цикл перераспределения груза: A_3B_1 - A_1B_1 - A_1B_3 – A_3B_3 – A_3B_1. Для этого в перспективную клетку A_3B_1 поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-». Из чисел, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, то есть $\gamma_2=\min\{450, 50\}=50$.
Прибавляем $\gamma_2=50$ к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках, и вычитаем $\gamma_2=50$ из объемов грузов, стоящих в минусовых клетках. В результате получен новый опорный план III.

план III	B_1 150	B_2 300	B_3 50	B_4 400	B_5 100	потенциалы α_i
A_1 450	^{1} 400	^{6} -	^{5} 350	^{3} -	^{0} -	$\alpha_1=0$
A_2 200	^{4} -	^{3} 200	^{5} -	^{7} -	^{0} -	$\alpha_2=-1$
A_3 350	^{5} 50	^{8} 100	^{10} -	^{4} 250	^{0} 150	$\alpha_3=4$
b_j	$\beta_1=1$	$\beta_2=4$	$\beta_3=5$	$\beta_4=0$	$\beta_5=-4$	

Определяем значение целевой функции третьего опорного плана.
$F(X_3)=F(X_2)+\Delta_{31}\gamma_2=4850-1\cdot 50=4800$
Проверим оптимальность опорного плана III методом потенциалов.
Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, как и должно быть m+n-1=5+3-1=7. Следовательно, опорный план III является невырожденным. Найдем потенциалы α_i, β_j по занятым клеткам таблицы, в которых $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$, полагая, что $\alpha_1=0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_1+\beta_1=1 \\ \alpha_1+\beta_3=5 \\ \alpha_2+\beta_2=3 \\ \alpha_3+\beta_1=5 \\ \alpha_3+\beta_2=8 \\ \alpha_3+\beta_4=4 \\ \alpha_3+\beta_5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \beta_1=1 \\ \beta_3=5 \\ \alpha_3=4 \\ \beta_2=4 \\ \beta_4=0 \\ \beta_5=-4 \\ \alpha_2=-1 \end{cases}$$

Занесем найденные значения потенциалов в таблицу и вычислим оценки свободных клеток по формуле: $\Delta_{ij}=c_{ij}-(\alpha_i+\beta_j)$
$\Delta_{12}=6-(0+4)=2$; $\Delta_{14}=3-(0-0)=3$; $\Delta_{15}=0-(0-4)=4$; $\Delta_{21}=4-(-1+1)=4$
$\Delta_{23}=5-(-1+5)=1$; $\Delta_{24}=7-(-1+0)=8$; $\Delta_{25}=0-(-1-4)=5$; $\Delta_{33}=10-(4+5)=1$
Третий опорный план III является оптимальным, так как отрицательных оценок свободных клеток нет.
Оптимальный план можно записать следующим образом:

$$X^*=\begin{pmatrix} 400 & 0 & 350 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 100 & 0 & 250 & 150 \end{pmatrix}$$

$F(X^*)=4800$ ден. ед.
Учитывая, что в решение задачи был введён фиктивный потребитель (B_5), запишем ответ задачи без него.

$$X^*=\begin{pmatrix} 400 & 0 & 350 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \\ 50 & 100 & 0 & 250 \end{pmatrix}$$

$F(X^*)=4800$ ден. ед.
Анализ плана:
Из пункта A_1 необходимо 400 единиц груза направить в пункт B_1 и 350 единиц груза направить в пункт B_3; из пункта A_2 необходимо 200 единиц груза направить в пункт B_2; а из пункта A_3 необходимо 50 единиц груза направить в пункт B_1, 100 единиц груза

направить в пункт B_2 и 250 единиц груза направить в пункт B_4. При этом суммарные затраты на перевозку продукции будут минимальными и составят 4800 ден.ед. Заметим также, что из пункта A_3 не вывезено 150 единиц груза, а грузы из пунктов A_1 и A_2 вывезены полностью, потребность всех пунктов B_1; B_2; B_3 и B_4 удовлетворена полностью.