Лекция 8

§8. Правила построения двойственной задачи.

Симметричные двойственные задачи.

Прямая задача	Двойственная задача
$\max F(\overline{X}) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$	$\min Z(\overline{Y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \ \left(i = \overline{1, m}\right)$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \ge c_j \ \left(j = \overline{1, n}\right)$
$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right)$	$y_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1, m}\right)$

Сопоставляя пары двойственных задач, можно установить следующие взаимосвязи.

1) Если прямая задача — на максимум, то двойственная к ней — на минимум, и наоборот.
2) Коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются свободными членами ограничений двойственной задачи.
3) Свободные члены b_i ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной.
4) Матрицы ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу.
5) Если прямая задача — на максимум, то её система ограничений представляется в виде неравенств типа ≤. Двойственная задача решается на минимум, и её система ограничений имеет вид неравенств типа ≥.
6) Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной, а число ограничений двойственной — числу переменных прямой.
7) Все переменные в обеих задачах неотрицательны.

Несимметричные двойственные задачи.

Прямая задача	Двойственная задача
$\max F(\overline{X}) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$	$\min Z(\overline{Y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \ \left(i = \overline{1, m_1}\right)$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \ge c_j \ \left(j = \overline{1, n_1}\right)$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \ \left(i = \overline{m_1 + 1, m}\right)$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i = c_j \ \left(j = \overline{n_1 + 1, n}\right)$
$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n_1}; \quad n_1 \le n\right)$	$y_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1, m_1}; \quad m_1 \le m\right)$
x_j – любого знака $\left(j = \overline{n_1 + 1, n}\right)$	y_i – любого знака $\left(i = \overline{m_1 + 1, m}\right)$

Таким образом, двойственная задача со смешанными ограничениями составляется с соблюдением следующих дополнительных правил.

1) Если на переменную x_j прямой задачи наложено условие неотрицательности, то j-е условие системы ограничений двойственной задачи записывается в виде неравенства, и наоборот.
2) Если на переменную x_j прямой задачи не наложено условие неотрицательности, то j-е ограничение двойственной задачи записывается в виде строгого равенства.
3) Если в прямой задаче имеются ограничения равенства, то на соответствующие переменные двойственной задачи не налагается условие неотрицательности.

Очевидно, что задача, двойственная двойственной, совпадает с исходной. Поэтому безразлично, какую задачу принять в качестве прямой, а какую — двойственной. Следует говорить о паре взаимно двойственных задач.

§9. Теоремы двойственности.

Теорема: (критерий оптимальности Канторовича). Если для некоторых допустимых планов x^* и y^* пары двойственных задач выполняется равенство $F(X^*)=Z(Y^*)$, то X^* и Y^* являются оптимальными планами соответствующих задач.

Теорема: (малая теорема двойственности). Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.

Теорема: Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций равны $F(X_{опт})=Z(Y_{опт})$. Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.

Теорема: (условия дополняющей нежесткости). Если какое-либо ограничение одной из задач её оптимальным планом обращается в строгое неравенство, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю; если же какая-либо компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальным планом должно обращаться в строгое равенство.

Вывод: Двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов; дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положительную оценку, а ресурс избыточный (используемый не полностью) имеет нулевую оценку.

Теорема: (об оценках). Двойственные оценки показывают приращение функции цели, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения задачи математического программирования.

Задача (см практика) дополнить

Отдел заказов магазина ежедневно принимает от населения заказы на продукты А и В. Отдел располагает ресурсами четырёх видов:

Виды торговых ресурсов	Расход ресурсов на продажу партии товара		Объём ресурсов в секции
	A	B	
Площадь отдела, $м^2$	5	2	79
Ёмкость подсобно-складского отдела, $м^3$	1	0	14
Рабочее время подсобных рабочих, чел.-час.	3	1	54
Торговое оборудование и тара для хранения и доставки товаров, ед.	0	4	28
Прибыль от реализации одной партии товара, руб.	10	15	

Требуется:

1. **Составить оптимальный план продажи товаров, максимизирующий прибыль отдела заказов;**

2. **На основе анализа двойственных оценок пояснить смысл «вклада» дефицитных ресурсов в увеличении критерия оптимальности.**

Решение:

Составим математическую модель задачи:

$\max F(X)=10x_1+15x_2$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 79 \\ x_1 \le 14 \\ 3x_1 + x_2 \le 54 \\ 4x_2 \le 28 \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведём к системе уравнений путем введения дополнительных переменных x_3, x_4, x_5, x_6 (то есть приведём задачу к каноническому виду)

$\max F(X)=10x_1+15x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5+0\cdot x_6$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 79 \\ x_1 + x_4 = 14 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 54 \\ 4x_2 + x_6 = 28 \end{cases}$$

$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,6}$

Матрица коэффициентов $A=(a_{ij})$ этой системы уравнений имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Векторы $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$, $\bar{A}_5$, $\bar{A}_6$ - линейно независимы, так как определитель, составленный из компонент этих векторов, отличен от нуля. Следовательно, соответствующие этим векторам переменные x_3, x_4, x_5, x_6 являются базисными и в этой задаче определяют объемы неиспользованных ресурсов.

Функцию цели запишем в виде уравнения:

$\max F(X)=0-(10x_1+15x_2)$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных.

$$\begin{cases} x_3 = 79 - (5x_1 + 2x_2) \\ x_4 = 14 - (x_1) \\ x_5 = 54 - (3x_1 + x_2) \\ x_6 = 28 - (4x_2) \end{cases}$$

Полагая, что свободные переменные $x_1=0$, $x_2=0$, получим первый опорный план $X_1=(0, 0, 79, 14, 54, 28)$, $F(X_1)=0$, в котором базисные переменные $x_3=79$, $x_4=14$, $x_5=54$, $x_6=28$.

Следовательно, партии товаров не продаются, доход равен нулю, а ресурсы не используются. Полученный первый опорный план запишем в симплексную таблицу.

План	БП	ЗБП	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	δ - min
I	x_3	79	5	2	1	0	0	0	39,5
	x_4	14	1	0	0	1	0	0	-
	x_5	54	3	1	0	0	1	0	54

	←x_6	28	0	4	0	0	0	1	7
$F(X_1)$		0	-10	-15	0	0	0	0	-
II	←x_3	65	↓5	0	1	0	0	-0,5	13
	x_4	14	1	0	0	1	0	0	14
	x_5	47	3	0	0	0	1	-0,25	15 2/3
	x_2	7	0	1	0	0	0	0,25	-
$F(X_2)$		105	-10	0	0	0	0	3,75	-
III	x_1	13	1	0	0,2	0	0	-0,1	-
	x_4	1	0	0	-0,2	1	0	0,1	-
	x_5	8	0	0	-0,6	0	1	0,05	-
	x_2	7	0	1	0	0	0	0,25	-
$F(X_3)$		235	0	0	2	0	0	2,75	-

Первый опорный план не оптимальный, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты: -10; -15.

За ведущий столбец выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как, сравнивая по модулю, имеем: |-15|>{|-10|}. Вычислим значения δ_i по строкам как частное от деления $\frac{b_i}{a_{i2}}$ и из них выберем наименьшее:

$$\min \delta_i = \min\left(\frac{b_i}{a_{i2}}\right) = \min\left(\frac{79}{2};\ \ \frac{54}{1};\ \ \frac{28}{4}\right) = 7.$$

Следовательно, четвёртая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен 4 и находится на пересечении ведущего столбца x_2 и ведущей строки x_6 и выделен в таблице.

Формируем следующую часть симплексной таблицы.

Вместо переменной x_6 в план II войдет переменная x_2. Строка, соответствующая переменной x_2 в плане II, получена в результате деления всех элементов строки x_6 плана I на разрешающий элемент РЭ=4. На месте разрешающего элемента в плане II получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 плана II записываем нули. Таким образом, в новом плане II заполнены строка x_2 и столбец x_2. Все остальные элементы нового плана II, включая элементы индексной строки, получены по правилу прямоугольника. Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ=4. Во второй вершине по диагонали находится старое значение элемента СЭ. Третий и четвертый элементы А и В завершают построение прямоугольника в недостающих двух вершинах и расположены по другой диагонали. Значение нового элемента в плане II находится из выражения: $СЭ - \frac{A \cdot B}{РЭ} = НЭ$.

Заметим, что все элементы, расположенные на пересечении строк и столбцов, соответствующих одноименным базисным элементам, равны 1, остальные элементы столбца в базисах векторов, включая индексную строку, равны нулю.

Итак, план II сформирован, но он не оптимальный, так как в индексной строке находится отрицательный элемент: –10. Аналогично формируем план III и он оптимальный, так как в индексной строке нет отрицательных элементов.

Оптимальный план можно записать так: X*=(13; 7; | 0; 1; 8; 0); F(X*)=235 – max.

Следовательно, необходимо запланировать продажу 13 партий товара А и 7 партий товара В, чтобы получить максимальную прибыль в размере 235 руб.

Проверка (в каноническую систему):

$$\begin{cases} 5\cdot 13+2\cdot 7+0=79 \\ 13+1=14 \\ 3\cdot 13+7+8=54 \\ 4\cdot 7+0=28 \end{cases}$$

max F(X)=10·13+15·7=235

В оптимальном плане среди базисных переменных есть две дополнительные переменные x_4 и x_5. Это указывает на то, что ресурсы ёмкость подсобно-складского отдела и рабочее время подсобных рабочих недоиспользованы соответственно на 1 м^3 и на 8 чел.-час., а ресурсы площадь отдела и торговое оборудование и тара для хранения и доставки товаров использованы полностью и являются дефицитными.

В индексной строке оптимального плана в столбцах переменных x_3, x_6 не вошедших в состав базисных, получены ненулевые элементы, поэтому оптимальный план задачи является единственным.

Первое и четвёртое ограничения исходной задачи выполняются как равенства. Это означает, что ресурсы первого и четвёртого видов полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными. Второе и третье ограничения задачи выполняются как неравенства. Это означает, что ресурсы второго и третьего видов полностью не используются в оптимальном плане, и не являются дефицитными, остатки их в оптимальном плане $x_4^*=1$ и $x_5^*=8$.

Составим экономико-математическую модель двойственной задачи:

min $L(Y)=79y_1+14y_2+54y_3+28y_4$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5y_1+y_2+3y_3\ge 10 \\ 2y_1+y_3+4y_4\ge 15 \\ y_1\ge 0;\quad y_2\ge 0;\quad y_3\ge 0;\quad y_4\ge 0 \end{cases}$$

Согласно теоремам двойственности и соответствиям между двойственными переменными из последней строки симплексной таблицы выписываем решение двойственной задачи.

Оптимальный план двойственной задачи можно записать так:

$Y^*=(2;\ 0;\ 0;\ 2{,}75;\ \vert\ 0;\ 0)$ и $L(Y^*)=235$ – min.

Проверка (в каноническую систему):

$$\begin{cases} 5\cdot 2+0+0+3\cdot 0+0=10 \\ 2\cdot 2+0+4\cdot 2{,}75=15 \end{cases}$$

$$\min L(Y)=79\cdot 2+14\cdot 0+54\cdot 0+28\cdot 2{,}75=235$$

Решение прямой задачи даёт оптимальный план товарооборота по реализации товаров двух видов А и В, а решение двойственной – оптимальную систему оценок ресурсов, используемых в процессе реализации. Величина двойственной оценки показывает, на сколько возрастает значение целевой функции при увеличении дефицитности ресурса на единицу.

Итак, увеличение первого ресурса – площади отдела на единицу ни к чему не приведёт, так как данный ресурс избыточен.

Увеличение второго ресурса - ёмкости подсобно-складского помещения на единицу приведёт к получению нового оптимального плана, в котором прибыль возрастает на 1 руб. и станет равной 236 руб.

Увеличение третьего ресурса – рабочего времени подсобных рабочих на единицу приведёт к получению нового оптимального плана, в котором прибыль возрастает на 8 руб. и станет равной 243 руб.

Увеличение четвёртого ресурса - торгового оборудования и тары для хранения и доставки товаров на единицу ни к чему не приведёт, так как данный ресурс избыточен.