Лекция 7

§4. Общая идея симплексного метода.

Итак, возникает вопрос о пути решения ЗЛП с любым числом переменных. Найти каким-нибудь способом все крайние точки многогранника планов и сравнить в них значения целевой функции. Такой путь решения даже с относительно небольшим числом переменных и ограничений практически неосуществим, так как процесс отыскания крайних точек сравним по трудности с решением исходной задачи, к тому же число крайних точек многогранника планов может оказаться весьма большим. В связи с этими трудностями возникла задача рационального перебора крайних точек. Ее суть в следующем.

Если известны какая-нибудь крайняя точка и значение в ней целевой функции, то все крайние точки, в которых целевая функция принимает худшее значение, заведомо не нужны. Отсюда естественно стремление найти способ перехода от данной крайней точки к смежной по ребру лучшей, от нее к еще лучшей (не худшей) и т.д. Для этого нужно иметь признак того, что лучших крайних точек, чем данная крайняя точка, вообще нет. В этом и состоит общая идея наиболее широко применяемого в настоящее время симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) для решения ЗЛП.

Итак, в алгебраических терминах симплексный метод предполагает:

1.) умение находить начальный опорный план;
2.) наличие признака оптимальности опорного плана;
3.) умение переходить к нехудшему опорному плану.

Симплексный метод - метод последовательного улучшения плана. Симплексный метод - это итерационный процесс, который начинается с одного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области возможных решений до тех пор, пока не достигнет оптимального значения, в частности по угловым точкам многоугольника решений, полученного геометрическим методом. Значения целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает (для задач на минимум не возрастает).

В тех случаях, когда модель содержит m уравнений, для построения пробных решений используются m переменных, принимающих некоторые положительные значения при нулевых значениях остальных переменных. Вначале допустим, что решение существует, причем оптимальное значение целевой функции конечно. В этом случае вычислительная процедура может быть представлена в следующей последовательности.

1) Математическая модель задачи должна быть канонической. Если она неканоническая, то её надо привести к каноническому виду ($b_i \geq 0$).

2) Находим исходное опорное решение (план I) и проверяем его на оптимальность. Для этого заполняем симплексную таблицу. Все строки таблицы заполняем по данным системы ограничений, элементы индексной строки, заполняем по данным целевой функции, беря их с противоположным знаком. Замечаем, что все элементы, расположенные на пересечении строк и столбцов, соответствующих одноимённым базисным переменным, равны 1, остальные элементы столбца в базисах векторов, включая индексную строку, равны 0.

Возможны следующие случаи при решении задачи на ***максимум***:

• если при решении задачи на ***максимум*** все оценки индексной строки неотрицательны $\Delta_j \geq 0$, то найденное решение оптимальное – признак оптимальности;

• если хотя бы одна оценка индексной строки $\Delta_j < 0$, но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, так как целевая функция неограничена в области допустимых решений;

• если хотя бы одна оценка индексной строки $\Delta_j<0$, а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно перейти к другому опорному решению;

• если отрицательных оценок в индексной строке несколько, то в столбец базисной переменной (БП) вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка.

Итак, за ведущий k-й столбец принимаем столбец, соответствующий наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценки. За ведущую l-ую строку принимаем ту, которой соответствует минимальное положительное отношение свободных членов (b_i) к коэффициентам k-го (ведущего) столбца $\min \frac{b_i}{a_{ik}}$. Элемент, находящийся на пересечении ведущей строки и ведущего столбца, называется разрешающим элементом РЭ.

3) Заполняем следующую симплексную таблицу (план II):

- вместо переменой x_l базисной переменной становится переменная x_k;
- переписываем ведущую строку, разделив ее на разрешающий элемент РЭ;
- заполняем базисные столбцы;
- остальные коэффициенты таблицы находим по правилу "прямоугольника"

$$НЭ = СЭ - \frac{A \cdot B}{РЭ},$$

где НЭ – новый элемент; СЭ – старый элемент; РЭ – разрешающий элемент; А и В – элементы старого плана, образующие прямоугольник (находящиеся по диагонали) с элементами СЭ и РЭ.
Получаем новое опорное решение, которое проверяем на оптимальность, и т.д.
Если в оптимальный план вошла дополнительная переменная x_{n+1}, то при реализации такого плана имеются недоиспользованные ресурсы i-го вида в количестве, полученном в столбце свободных членов симплексной таблицы.

Возможны следующие случаи при решении задачи на ***минимум*** (можно не применять данный собственный алгоритм решения, а перейти к решению задачи на максимум -F):

• если при решении задачи на ***минимум*** все оценки индексной строки неположительны $\Delta_j \leq 0$, то найденное решение оптимальное – признак оптимальности;

• если хотя бы одна оценка индексной строки $\Delta_j>0$, но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, так как целевая функция неограничена в области допустимых решений;

• если хотя бы одна оценка индексной строки $\Delta_j>0$, а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно перейти к другому опорному решению;

• если положительных оценок в индексной строке несколько, то в столбец базисной переменной (БП) вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине положительная оценка.

Итак, за ведущий k-й столбец принимаем столбец, соответствующий наибольшей по абсолютной величине положительной оценки (в дальнейшем алгоритмы совпадают).

§5. Построение начального опорного плана.

1) Пусть математическая модель задачи имеет канонический вид.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad b_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}$$

Определение 1. Ограничение ЗЛП имеет предпочтительный вид, если при неотрицательности правой части ($b_i \geq 0$) левая часть ограничения содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а в остальные ограничения-равенства — с коэффициентом, равным нулю.

Определение 2. Если каждое ограничение-равенство ЗЛП в каноническом виде содержит переменную, входящую в левую часть с коэффициентом, равным единице, а во все остальные с коэффициентом, равным нулю (при неотрицательности правых частей), то говорят, что система ограничений представлена в предпочтительном виде.
В этом случае легко найти ее опорное решение (базисное с неотрицательными координатами): все свободные переменные нужно приравнять нулю, тогда базисные переменные будут равны свободным членам. Приравнивание предпочтительных переменных к правым частям дает базисное решение, т. е. крайнюю точку многогранника решений. Поэтому предпочтительные переменные — базисные. Переменные, приравниваемые нулю, — свободные.

2) Пусть математическая модель задачи имеет стандартный вид.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad b_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}$$

Сведем задачу к каноническому виду. Для этого добавим к левым частям неравенств дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$. Получим систему, эквивалентную исходной:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i \quad b_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}$$

И, следовательно, начальный опорный план примет вид:

$$x_0 = \left(\underbrace{0; 0; \ldots; 0;}_{n} \underbrace{b_1; b_2; \ldots; b_m}_{m} \right)$$

В целевую функцию, как отмечалось выше, дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю.

3) Пусть математическая модель задачи имеет вид.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \quad b_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}$$

Вычтем из левых частей неравенств дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$. Получим систему, эквивалентную исходной:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - x_{n+i} = b_i \quad b_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}$$

Однако теперь система ограничений не имеет предпочтительного вида, так как дополнительные переменные x_{n+i} входят в левую часть (при $b_i \geq 0$) с коэффициентами, равными -1. Поэтому, вообще говоря, базисный план является недопустимым.

$$x_0 = \left(\underbrace{0;\,0;\,...;\,0;}_{n}\ \underbrace{-b_1;\,-b_2;\,...;\,-b_m}_{m}\right)$$

В этом случае вводится так называемый искусственный базис.

К левым частям ограничений-равенств, не имеющих предпочтительного вида, добавляют искусственные переменные w_i. В целевую функцию переменные w_i вводят с коэффициентом M в случае решения задачи на минимум и с коэффициентом -M для задачи на максимум, где M - большое положительное число. Полученная задача называется M-задачей, соответствующей исходной. Она всегда имеет предпочтительный вид.

4) Пусть математическая модель задачи имеет канонический вид.

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad b_i \ge 0 \quad i = \overline{1,m}$$

и ни одно из ограничений не имеет предпочтительной переменной. M-задача будет иметь вид:

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \mp \sum_{i=1}^{m} M \cdot w_i \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + w_i = b_i \quad b_i \ge 0 \quad i = \overline{1,m}$$

И, следовательно, начальный опорный план примет вид:

$$x_0 = \left(\underbrace{0;\,0;\,...;\,0;}_{n}\ \underbrace{b_1;\,b_2;\,...;\,b_m}_{m}\right)$$

Если некоторые из уравнений имеют предпочтительный вид, то в них не следует вводить искусственные переменные.

<u>Теорема:</u> Если в оптимальном плане $\overline{X}_{опт} = (x_1;\,x_2;\,...;\,x_n;\,w_1;\,w_2;\,...;\,w_m)$ M-задачи все искусственные переменные $w_i = 0 \quad i = \overline{1,m}$, то план $\overline{X}_{опт} = (x_1;\,x_2;\,...;\,x_n)$ является оптимальным планом исходной задачи.
Решение исходной задачи симплексным методом путем введения искусственных переменных w_i, называется симплексным методом с искусственным базисом.
Если в результате применения симплексного метода к расширенной задаче получен оптимальный план, в котором все искусственные переменные w_i=0, то его первые n компоненты дают оптимальный план исходной задачи.

<u>Теорема:</u> Если в оптимальном плане M-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, т. е. ее условия несовместны.

§6. Признак оптимальности опорного плана. Альтернативный оптимум.

<u>Теорема:</u> Пусть исходная задача решается на максимум. Если для некоторого опорного плана все оценки неотрицательны $\Delta_j \ge 0$, то такой план оптимален. Пусть исходная задача решается на минимум. Если для некоторого опорного плана все оценки неположительны $\Delta_j \leq 0$, то такой план оптимален - *признак оптимальности опорного плана*.

Из геометрической интерпретации ЗЛП следует, что если линия уровня проходит через сторону многоугольника планов, то имеется бесчисленное множество оптимальных планов. В этом случае говорят об альтернативном оптимуме.

Теорема: Если в индексной строке последней симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, находится нуль, принадлежащий свободной переменной, не вошедшей в базис, а в столбце, содержащем этот нуль, имеется хотя бы один положительный коэффициент, то задача имеет бесчисленное множество оптимальных планов.
Свободную переменную, соответствующую указанному столбцу, можно внести в базис, выполнив соответствующие этапы алгоритма. В результате будет получен второй оптимальный план с другим набором базисных переменных.

Критерий альтернативного оптимума – равенство нулю хотя бы одной оценки свободной переменной.

Если только одна оценка свободной переменной равна нулю, то решение находится по формуле:

$$\overline{X}_{опт} = t\overline{X}_{опт1} + (1-t)\overline{X}_{опт2}.$$

Если две и более, например k, свободных переменных равны нулю, то решение находится по формуле:

$$\overline{X}_{опт} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overline{X}_{оптi}, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{k} t_i = 1,\ t_i \geq 0.$$

Следствие: Если в индексной строке симплексной таблицы содержащей оптимальный план, все оценки свободных переменных положительны, то найденный оптимальный план единственный.

§7. Признак неограниченности целевой функции.

Как следует из геометрической интерпретации ЗЛП, возможны случаи, когда целевая функция при решении на максимум не ограничена сверху, а при решении на минимум не ограничена снизу. Такие случаи выявляются при решении задачи симплексным методом на основе следующих теорем.
Теорема: Если в индексной строке симплексной таблицы ЗЛП на максимум содержится отрицательная оценка $\Delta_j<0$, а в соответствующем столбце переменной x_j нет ни одного положительного коэффициента, то целевая функция на множестве допустимых планов задачи не ограничена сверху.
Теорема: Если в индексной строке симплексной таблицы ЗЛП на минимум содержится положительная оценка $\Delta_j>0$, а в столбце переменной x_j нет ни одного положительного коэффициента, то на множестве допустимых планов целевая функция не ограничена снизу.