

Лекция 6

Линейное программирование

§1. Понятие линейного программирования

Линейное программирование — раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на переменные.

Линейное программирование — это частный раздел оптимального программирования. В свою очередь *оптимальное (математическое) программирование* — раздел прикладной математики, изучающий задачи условной оптимизации. В экономике такие задачи возникают при практической реализации принципа оптимальности в планировании и управлении.

Необходимым условием использования оптимального подхода к планированию и управлению (принципа оптимальности) является гибкость, альтернативность производственно-хозяйственных ситуаций, в условиях которых приходится принимать планово-управленческие решения. Именно такие ситуации, как правило, и составляют повседневную практику хозяйствующего субъекта (выбор производственной программы, прикрепление к поставщикам, маршрутизация, раскрой материалов, приготовление смесей и т.д.).

По типу решаемых задач его методы разделяются на *универсальные* и *специальные*.

С помощью универсальных методов могут решаться любые *задачи линейного программирования* (ЗЛП).

Специальные методы учитывают особенности модели задачи, ее целевой функции и системы ограничений.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений. Классические же методы дифференциального исчисления связаны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда — необходимость разработки новых методов.

§2. Формы записи задачи линейного программирования, их эквивалентность и способы преобразования.

Определение 1. Линейное программирование — наука о методах исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Эта линейная функция называется целевой, а ограничения, которые математически записываются в виде уравнений или неравенств, называются системой ограничений.

Определение 2. Математическое выражение целевой функции и её ограничений называется математической моделью экономической задачи.

Модель задачи линейного программирования может быть записана в одной из приведённых ниже форм.

1. *Общая, или произвольная форма записи:*

$$Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max(\min)$$

при условиях ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad i = \overline{1, m_1} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \quad i = \overline{m_2 + 1, m} \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n_1} \\ x_j - \text{произвольные} \quad j = \overline{n_1 + 1, n} \end{array} \right.$$

2. *Симметричная, или стандартная форма записи:*

$Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max$ при условиях ограничениях: $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right.$	$Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min$ при условиях ограничениях: $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right.$
--	--

3. *Каноническая или основная форма записи:*

$$Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max$$

при условиях ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

Указанные выше три формы записи ЗЛП эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть сведена к другой форме, т. е. если имеется способ нахождения оптимального решения задачи в одной из указанных форм, то

тем самым может быть определен оптимальный план задачи в любой другой форме (говорят о стратегической эквивалентности задачи в любой из форм).

Так, при необходимости задачу минимизации можно заменить задачей максимизации, и наоборот. Очевидно, что минимальное значение функции $z(x)$ равно максимальному значению функции $-z(x)$, взятому с противоположным знаком, т. е.

$$\min Z(x) = -\max(-Z(x)).$$

Неравенство типа $\geq$ путем умножения левых и правых частей на -1 можно превратить в неравенство типа $\leq$, и наоборот.

Ограничения-неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} b_i$$

преобразуются в ограничения-равенства путем прибавления (вычитания) к левым частям дополнительных (балансовых) неотрицательных переменных $x_{n+i} \geq 0$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \begin{cases} + \\ - \end{cases} x_{n+i} = b_i$$

В случае необходимости ограничение-равенство:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases}$$

Если в ЗЛП какая-то переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, ее заменяют разностью двух других неотрицательных переменных $x'_k \geq 0$ и $x''_k \geq 0$:

$$x_k = x'_k - x''_k.$$

Вводимые дополнительные переменные имеют определенный экономический смысл, прямо связанный с содержанием задачи. Так, в задачах об использовании ресурсов они показывают величину неиспользованного ресурса, в задачах о смесях — потребление соответствующего компонента сверх нормы.

Определение 3. Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений.

Множество допустимых решений образует область допустимых решений (ОДР).

Определение 4. Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения, называется оптимальным решением задачи линейного программирования и обозначается $X_{\text{опт}}$.

§3. Геометрический метод решения.

Определение 1. Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и их произвольную выпуклую комбинацию.

Определение 2. Угловыми точками выпуклого множества называются точки, не являющиеся выпуклой комбинацией двух произвольных точек множества.

Определение 3. Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто). Непустое множество планов называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника решений - вершиной.

Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то целевая функция задачи принимает экстремальное значение в одной из вершин многогранника решений. Если экстремальное значение достигается более чем в одной вершине, то целевая функция принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник, каждая вершина которого определяет опорный план. Для одного из опорных планов (т. е. в одной из вершин многогранника решений) значение целевой функции является экстремальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов).

Если система неравенств совместна, то областью допустимых решений задачи являются выпуклое множество, которое называется многоугольником решений.

Задача с двумя переменными:

Найти решение $x=(x_1; x_2)$, доставляющее $\max (\min) Z=c_1x_1+c_2x_2$ при условиях ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 a_{ij} \cdot x_j \leq b_i & i = \overline{1, m} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решить задачу линейного программирования с двумя переменными можно графическим (геометрическим) методом.

Геометрический метод решения

1. Построим на плоскости X_1OX_2 многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств.
2. Построив прямые системы, найдем соответствующие, знакам неравенств полуплоскости и их пересечение.
3. Построим многоугольником решений задачи, координаты точек которого удовлетворяют условию неотрицательности переменных и неравенствам системы ограничений задачи.
4. Построим вектор $\vec{n}(c_1; c_2)$.
5. Построим начальную прямую целевой функции (линию нулевого уровня). Передвигая начальную прямую в направлении вектора $\vec{n}$ (при необходимости сдвинув её назад), найдем точки входа и выхода в которых начальная прямая принимает положение опорной прямой.
6. Определяем координаты этих точек и значения целевой функции. В данных точках целевая функция будет иметь минимальное и максимальное значения.

Возможны следующие случаи:

1. оптимальный план единственный: линия уровня и ОДР имеют одну общую точку;
2. оптимальных планов бесконечное множество: линия уровня проходит через сторону ОДР;
3. целевая функция не ограничена: линия уровня не может занять разрешающего

положения;

4. ОДР состоит из единственной точки, где целевая функция достигает одновременно и максимального, и минимального значений;
5. задача не имеет решения: ОДР — пустое множество, т. е. система ограничений задачи несовместна.

$$Z(X) = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ -4x_1 + 3x_2 \geq -12 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

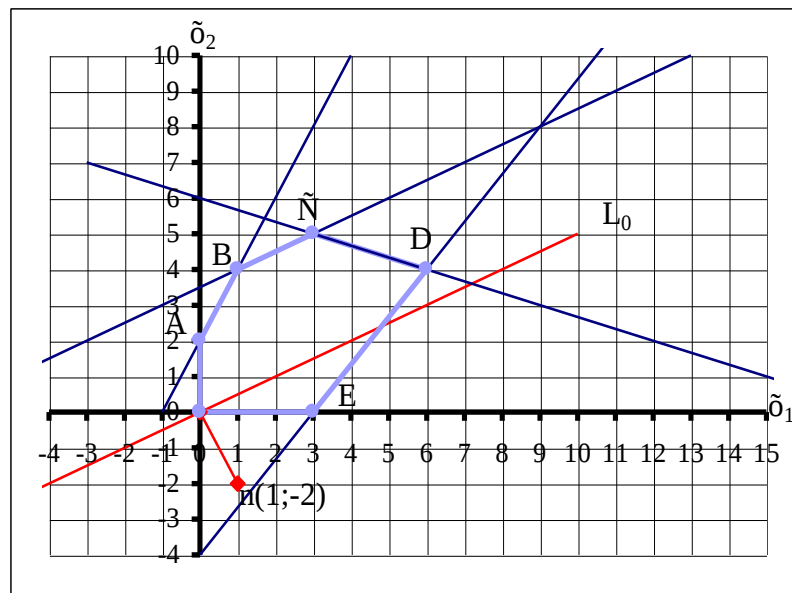
Решение:

Построим на плоскости X_1OX_2 многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 = 7 \\ -4x_1 + 3x_2 = -12 \\ x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases}$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0$$

Построив прямые системы, найдем соответствующие, знакам неравенств полуплоскости и их пересечение:



Многоугольником решений задачи является шестиугольник OABCDE, координаты точек которого удовлетворяют условию неотрицательности переменных и неравенствам системы ограничений задачи.

Для нахождения точек экстремума (точки максимума и точки минимума) построим начальную прямую L_0 (линию нулевого уровня) $Z(X) = 0$, то есть $x_1 - 2x_2 = 0$ и вектор $\vec{n}(1; -2)$.

Передвигая начальную прямую в направлении вектора $\vec{n}(1; -2)$, находим:

- точки B и C (отрезка BC) — точки входа в которых начальная прямая принимает положение опорной прямой. Следовательно, в точках B(1; 4) и C(3; 5) целевая функция имеет минимальное значение.

$$Z_{\min}(X)=Z_{\min}(B)=1-2\cdot4=-7$$

$$Z_{\min}(X)=Z_{\min}(C)=3-2\cdot5=-7$$

- точку E - точку выхода в которой начальная прямая принимает положение опорной прямой. Следовательно, в точке E(3; 0) целевая функция имеет максимальное значение.

$$Z_{\max}(X)=Z_{\max}(E)=3-2\cdot0=3$$

Ответ: $Z=-7$ – min; $Z=3$ – max.