Лекция 5

Основные понятия о векторах;

Линейные операции над векторами;

Проекция вектора на ось;

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы;

Действия над векторами, заданными проекциями.

Скалярное произведение векторов и его свойства;

Векторное произведение векторов и его свойства;

Смешанное произведение векторов и его свойства.

Векторная алгебра

§1 Основные понятия о векторах

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются *скалярными.* Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объем, температура, работа, масса. Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называют *векторными.* Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

Вектор - это направленный прямолинейный отрезок, т. е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается $\overline{AB}$ или $\overline{a}$. Вектор $\overline{BA}$ (у него начало в точке B, а конец в точке A) называется ***противоположным*** вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\overline{a}$, обозначается $-\overline{a}$.

Длиной или *модулем* вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\overline{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается через $\overline{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется *ортом* вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a}^{\,0}$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***коллинеарными,*** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\overline{a} \,||\, \overline{b}$.Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$) или противоположно ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$). Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***равными*** ($\overline{a} = \overline{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины. Равные векторы называют также *свободными.*

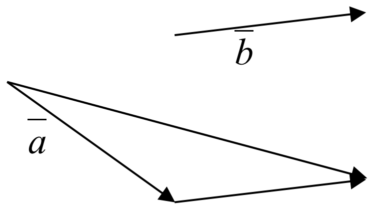
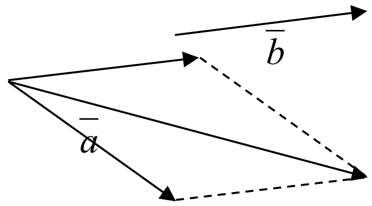
Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку O пространства.

Три вектора в пространстве называются ***компланарными,*** если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трёх векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

§2 Линейные операции над векторами

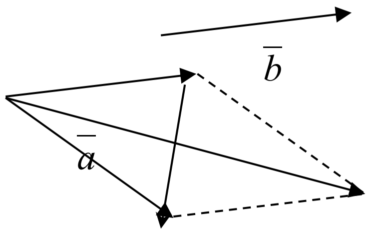
К линейным операциям над векторами относят сложение векторов, вычитание векторов, умножение вектора на число.

Вектора складываются по правилам треугольника и параллелограмма:

Правило треугольника	Правило параллелограмма
 Для того, чтобы вычислить сумму векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ *по правилу треугольника* нужно от конца вектора $\overline{a}$ отложить вектор $\overline{b}$ и тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец с концом вектора $\overline{b}$ и будет суммой этих векторов.	 Для того, чтобы вычислить сумму векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ *по правилу параллелограмма* нужно от начала вектора $\overline{a}$ отложить вектор $\overline{b}$, достроить до параллелограмма и тогда вектор исходящий из общего начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и будет суммой этих векторов.

Разность векторов представляется суммой с противоположным вектором.

В параллелограмме, построенном на двух векторах – одна диагональ является суммой этих векторов (исходящая из общего начала этих векторов), а другая – их разностью (начало которого совпадает с концом вектора – вычитаемого, а конец которого совпадает с концом вектора – уменьшаемого).



Произведением вектора $\overline{a}$ ***на скаляр (число)*** λ называется вектор $\lambda\cdot\overline{a}$ (или $\overline{a}\cdot\lambda$), который имеет длину $|\lambda|\cdot\overline{a}$, коллинеарен вектору $\overline{a}$, имеет направление вектора $\overline{a}$, если $\lambda>0$ и противоположное направление, если $\lambda<0$. Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения:

1) $\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}\Leftrightarrow\overline{b}\,||\,\overline{a}$. Если $\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}$, то $\overline{b}\,||\,\overline{a}$. Наоборот, если $\overline{b}\,||\,\overline{a}$, ($\overline{a}\neq\overline{0}$), то при некотором λ верно равенство $\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}$;

2) всегда $\overline{a}=|\overline{a}|\cdot\overline{a}^0$, т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;
2. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$;
3. $\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\overline{a})=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\overline{a}$;
4. $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\overline{a}=\lambda_1\cdot\overline{a}+\lambda_2\cdot\overline{a}$;
5. $\lambda\cdot(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{a}=\lambda\cdot\overline{a}+\lambda\cdot\overline{b}$;

Эти свойства позволяют проводить преобразования в линейных операциях с вектором так, как это делается в обычной алгебре: слагаемые менять местами, вводить скобки, группировать, выносить за скобки как скалярные, так и векторные общие множители.

§3 Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, т. е. направленная прямая.

Проекцией точки M на ось l, называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось.

Точка M_1 есть точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси.

Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на ось совпадает с M.

Пусть $\overline{AB}$ - произвольный вектор ($\overline{AB} \neq \overline{0}$). Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B вектора $\overline{AB}$ и рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены. Если точки A_1 и B_1 совпадают ($\overline{A_1B_1} = \overline{0}$), то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается так: $пр_l \overline{AB}$. Если $\overline{AB} = \overline{0}$ или $\overline{AB} \perp l$, то $пр_l \overline{AB}=0$.

Угол φ *между вектором* $\overline{a}$ и осью l (или угол между двумя векторами) удовлетворяет $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Рассмотрим некоторые *основные свойства проекций*.

Свойство 1. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\overline{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т. е. $пр_l \overline{a} = |\overline{a}| \cdot cos\varphi$.

Следствие 1. Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол — прямой.

Следствие 2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Свойство 2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось.

Свойство 3. При умножении вектора $\overline{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т. е. $пр_l(\lambda \cdot \overline{a}) = \lambda \cdot пр_l \overline{a}$.

Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

§4 Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy и Oz единичные_векторы (орты), обозначаемые i, j, k соответственно.

Выберем произвольный вектор $\bar{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\bar{a} = \overline{OM}$. Найдем проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. Тогда

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется ***разложением вектора по ортам координатных осей.*** **Числа a_x, a_y, a_z** называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$, т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство часто записывают в символическом виде: $\bar{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$.

Зная проекции вектора $\bar{a}$ можно легко найти выражение для модуля вектора:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

т. е. ***модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.***

Пусть углы вектора $\bar{a}$ с осями Ox, Oy и Oz соответственно равны α, β, γ.

По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$a_x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma$$

Или, что то же самое,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\bar{a}$.

Подставим выражения $a_x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha$, $a_y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta$, $a_z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma$ в равенство $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, получаем соотношение (сократив на $|\bar{a}|^2 \neq 0$):

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

т. е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.***

Легко заметить, что координатами единичного вектора $\bar{e}$ являются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, т. е. $\bar{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Итак, задав координаты вектора, всегда можно определить его модуль и направление, т. е. сам вектор.

§5 Действия над векторами, заданными проекциями

Пусть векторы $\overline{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\overline{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ заданы своими проекциями на оси координат Ox, Oy и Oz или, что то же $\overline{a}=a_x\cdot\overline{i}+a_y\cdot\overline{j}+a_z\cdot\overline{k}$, $\overline{b}=b_x\cdot\overline{i}+b_y\cdot\overline{j}+b_z\cdot\overline{k}$

Линейные операции над векторами

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно записать:

1. $\overline{a}\pm\overline{b}=(a_x\pm b_x)\cdot\overline{i}+(a_y\pm b_y)\cdot\overline{j}+(a_z\pm b_z)\cdot\overline{k}$, или кратко $\overline{a}\pm\overline{b}=\{a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z\}$. То есть при сложении (вычитании) векторов их одноимённые координаты складываются (вычитаются).

2. $\overline{a}\lambda=\lambda a_x\cdot\overline{i}+\lambda a_y\cdot\overline{j}+\lambda a_z\cdot\overline{k}$, или кратко $\overline{a}\lambda=\{\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z\}$. То есть при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.

Равенство векторов

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что два вектора $\overline{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\overline{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ равны тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x=b_x$; $a_y=b_y$; $a_z=b_z$, то есть

$$\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_x=b_x\\a_y=b_y\\a_z=b_z\end{cases}$$

Коллинеарность векторов

Из определения векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***коллинеарными,*** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\overline{a}\,||\,\overline{b}$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ *коллинеарны*, тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть

$$\overline{a}\,||\,\overline{b}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}\\[2ex]\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}\end{array}\right.$$

Координаты вектора

Координаты вектора $\overline{AB}$, если известны координаты его начала $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и конца $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ равны разностям соответсвующих координат его конца и начала, то есть $\overline{AB}=\{x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A\}$.

§6 Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение: Скалярным произведение двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними и обозначается $\bar{a}\,\bar{b}$ или $\bar{a}\cdot\bar{b}$ или $(\bar{a};\,\bar{b})$.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$$

или

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot cos\,\varphi,\text{ где }\varphi=\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right).$$

Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}$$

Свойства скалярного произведения

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;

2. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$;

3. $\bar{a}\cdot(\bar{b}\pm\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}\pm\bar{a}\cdot\bar{c}$;

4. $\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$ – скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины;

5. $\begin{cases}\bar{a}\cdot\bar{b}=0\\ \bar{a}\neq\bar{0}\neq\bar{b}\end{cases}\Leftrightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$ – скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они взаимно перпендикулярны.

Выражение скалярного произведения через координаты

$\cdot$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

Пусть заданы два вектора $\bar{a}=a_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k},\quad \bar{b}=b_x\cdot\bar{i}+b_y\cdot\bar{j}+b_z\cdot\bar{k}$ или, что то же самое $\bar{a}=\{a_x;\,a_y;\,a_z\}$ и $\bar{b}=\{b_x;\,b_y;\,b_z\}$, тогда скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноимённых координат

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(a_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k}\right)\cdot\left(b_x\cdot\bar{i}+b_y\cdot\bar{j}+b_z\cdot\bar{k}\right)=a_x\cdot\bar{i}\cdot b_x\cdot\bar{i}+a_x\cdot\bar{i}\cdot b_y\cdot\bar{j}+a_x\cdot\bar{i}\cdot b_z\cdot\bar{k}+$$
$$+a_y\cdot\bar{j}\cdot b_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}\cdot b_y\cdot\bar{j}+a_y\cdot\bar{j}\cdot b_z\cdot\bar{k}+a_z\cdot\bar{k}\cdot b_x\cdot\bar{i}+a_z\cdot\bar{k}\cdot b_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k}\cdot b_z\cdot\bar{k}=$$
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Приложения скалярного произведения

Нахождение угла между векторами:

Пусть заданы два ненулевых вектора $\bar{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\bar{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, тогда угол φ между ними находится по формуле:

$$cos\,\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Отсюда следует условие перпендикулярности двух ненулевых векторов $\bar{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\bar{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$:

$$\begin{cases}\bar{a}\perp\bar{b}\ (cos\,\varphi=cos\,90^\circ=0)\\ \bar{a}\neq\bar{0}\neq\bar{b}\end{cases}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0\ (a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0)$$

Нахождение проекции вектора на заданное направление:

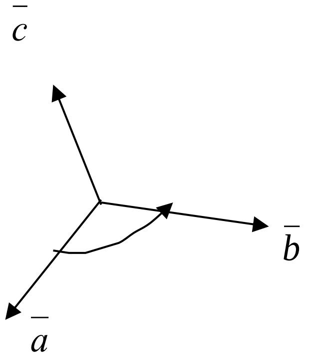
Нахождение проекции вектора $\bar{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ на направление, заданное вектором $\bar{b}=\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, осуществляется по формуле:

$$np_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

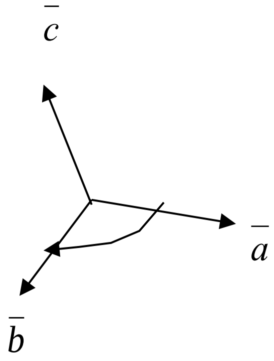
$$np_{\bar{a}}\bar{b}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

§7 Векторное произведение векторов и его свойства

Определение: Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую тройку*, если по часовой стрелки.



правая тройка



левая тройка

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который:

1. перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то есть $\bar{c} \perp \bar{a}$,и $\bar{c} \perp \bar{b}$;
2. имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, то есть;

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi, \text{ где } \varphi = \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$$

3. векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*.

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$$

или

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi, \text{ где } \varphi = \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right).$$

Векторное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или [$\bar{a}$; $\bar{b}$].

Свойства векторного произведения

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ - при перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак;

2. $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$;

3. $\bar{a} \times (\bar{b} \pm \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} \pm \bar{a} \times \bar{c}$;

4. $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$;

5. $\begin{cases} \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \\ \bar{a} \neq \bar{0} \neq \bar{b} \end{cases} \Leftrightarrow \bar{a} \,||\, \bar{b}$ - векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Выражение векторного произведения через координаты

$\times$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Пусть заданы два вектора $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$, $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$ или, что то же самое $\bar{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, тогда векторное произведение векторов равно:

$$\textit{I способ}\quad \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k}$$

$$\textit{II способ}\quad \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k}$$

$$\textit{III способ}\quad \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Приложения векторного произведения

Установление коллинеарности векторов:

Пусть заданы два ненулевых вектора $\bar{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, тогда если $\bar{a} \,||\, \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ и наоборот:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \bar{a} \,||\, \bar{b}$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника:

1 Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, равна модулю векторного произведения:

$$S_{параллелограмма} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \left\| \begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right\|$$

2 Площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, равна половине площади параллелограмма и равна половине модуля векторного произведения:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overline{a} \times \overline{b} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right\|$$

Например:

1. Вычислить скалярное и векторное произведение векторов $\overline{a}$ ={2; -1; 3} и $\overline{b}$ ={0; 5; -4}.

Вычислим координаты векторов:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-4) = -17;$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = -17;$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \overset{III\ способ}{=} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} \overset{I\ способ}{=} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot \overline{k} = -11 \cdot \overline{i} + 8 \cdot \overline{j} + 10 \cdot \overline{k};$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \{-11; 8; 10\}.$$

2. Даны координаты точек *A*(1; -2; 0), *B*(1; 3; -1), *C*(5; -2; 3). Найти площадь треугольника *ABC*.

Вычислим координаты векторов:

$$\overline{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\} = \{1-1; 3+2; -1-0\} = \{0; 5; -1\};$$

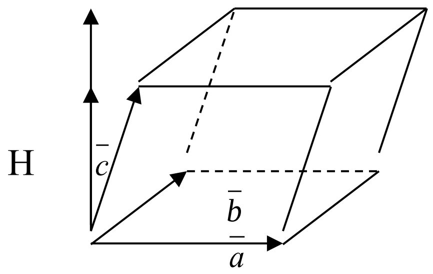
$$\overline{AC} = \{x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A\} = \{5-1; -2+2; 3-0\} = \{4; 0; 3\};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right| \cdot \overline{i} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot \overline{k} \Bigg| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| 15 \cdot \overline{i} - 4 \cdot \overline{j} - 20 \cdot \overline{k} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{15^2 + (-4)^2 + (-20)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{225 + 15 + 400} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{640} = 4\sqrt{10}$$

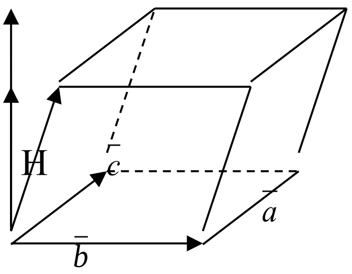
§8 Смешанное произведение векторов и его свойства

Рассмотрим произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, составленное следующим образом: $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется векторно-скалярным или смешанным, произведением трёх векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число (скаляр).



правая тройка

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = V_{параллелепипеда}$$



левая тройка

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = -V_{параллелепипеда}$$

Итак, смешанное произведение трёх векторов равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если эти векторы образуют левую тройку. Смешанное произведение векторов обозначают $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ или $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$.

Свойства смешанного произведения

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = (\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a} = (\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}$ – смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей;

2. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$ – смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного произведения – это позволяет записывать смешанное произведение векторов без знаков векторного и скалярного умножения;

3. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c};\ \overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b};\ \overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{c}\overline{a}\overline{b}$ – смешанное произведение меняет знак при перемене мест любых двух векторов сомножителей;

4. $\begin{cases}\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0\\ \bar{a}\neq\bar{0}\\ \bar{b}\neq\bar{0}\\ \bar{c}\neq\bar{0}\end{cases} \Leftrightarrow \bar{a};\bar{b};\bar{c} - \textit{компланарны}$ смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны;

Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы три вектора $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$, $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$, $\bar{c} = c_x \cdot \bar{i} + c_y \cdot \bar{j} + c_z \cdot \bar{k}$ или, что то же самое $\bar{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, и $\bar{c} = \{c_x;\ c_y;\ c_z\}$, тогда смешанное произведение векторов равно:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Итак, смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

Приложения смешанного произведения

Определение взаимной ориентации векторов в пространстве:

Определение взаимной ориентации векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ основано на следующих соображениях:

1. если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку;
2. если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют левую тройку.

Установление компланарности векторов:

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \textit{векторы} \quad \textit{компланарны}$$

Определение объёмов параллелепипеда и треугольной пирамиды:

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ вычисляется, как $V_{параллелепипеда} = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$.

Объём треугольной пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ вычисляется, как $V_{пирамиды} = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$.