Лекция 4

Матричная форма записи линейных уравнений;

Метод Крамера и метод обратной матрицы для решения систем n линейных уравнений с n неизвестными;

Метод Гаусса;

Исследования решений системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли;

Системы линейных однородных уравнений.

§1 Матричная форма записи линейных уравнений

Сведём коэффициенты при неизвестных в системе уравнений в матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Эта матрица состоит из m строк и n столбцов и называется матрицей системы. Введём в рассмотрение две матрицы столбца: матрицу неизвестных X и матрицу свободных членов B:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

X и B представляют собой векторы-столбцы, однако в целях единого подхода в рамках матричной алгебры удобнее трактовать их именно как матрицы, состоящие соответственно из n и m строк и одного столбца.

Тогда систему линейных уравнений можно записать в матричной форме, поскольку размер матрицы A равен $m\times n$, а размер X – $n\times 1$ и, значит, произведение этих матриц имеет смысл:

$$AX=B.$$

Произведение матриц AX является, как и B, матрицей столбцом размером $m\times 1$, состоящей из левых частей уравнений системы. Все уравнения этой системы вытекают из уравнения в силу определения равенства двух матриц.

Введем в рассмотрение еще одну матрицу; дополним матрицу системы A столбцом свободных членов и получим новую матрицу размером $m\times(n+1)$:

$$A_B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Матрица A_B называется расширенной матрицей системы. Эта матрица играет важную роль в вопросе о разрешимости системы уравнений.

§2 Метод Крамера и метод обратной матрицы для решения систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

Пусть число уравнений системы равно числу переменных, т.е. $m=n$. Тогда матрица системы является *квадратной,* а её определитель $\Delta=|A|$ называется *определителем системы* (*главным определителем системы*).

Если главный определитель системы отличен от нуля, то её решение можно найти по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

где Δj – определитель, получаемый из главного определителя путём замены j-го столбца столбцом свободных членов.

Если главный определитель системы отличен от нуля, то её решение можно найти с помощью обратной матрицы: $X=A^{-1}B$.

Система линейных уравнений принимает вид матричного уравнения:

$AX=B$.

Умножим слева обе части матричного уравнения на A^{-1} – обратную матрицу для A (если она существует):

$A^{-1}AX=A^{-1}B$, где $A^{-1}A=E$ – единичная матрица, то есть:

$EX=A^{-1}B$, где $EX=X$,

итак: $X=A^{-1}B$.

§3 Метод Гаусса

Метод Гаусса – метод последовательного исключения неизвестных. Решается метод Гаусса и с исходной системой линейных уравнений, и с её матричным представлением (что очень удобно).

Достоинства метода Гаусса по сравнению с другими (в частности с методом по формулам Крамера и с методом, с использованием обратной матрицы):

1 значительно менее трудоемкий;

2 позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти её решения (единственное или бесконечное множество);

3 даёт возможность найти максимальное число линейно независимых уравнений — ранг матрицы системы.

Метод Гаусса сводится к следующей схеме:

Выписывают расширенную матрицу системы, которая представляет собой матрицу коэффициентов A, дополненную вектором-столбцом свободных членов. Последний для удобства отделяется чертой. Затем над строками расширенной матрицы производят элементарные преобразования: разрешается изменять порядок строк (соответствует изменению порядка уравнений); умножать строки на отличные от нуля числа (отвечает умножению соответствующих уравнений на эти числа); прибавлять к любой строке расширенной матрицы любую другую ее строку, умноженную на число (соответствует прибавлению к одному из уравнений системы другого уравнения, умноженного на это число).

С помощью таких преобразований каждый раз получается расширенная матрица новой системы, равносильная исходной. При этом стараются привести матрицу к «треугольному» виду, из которого решение системы находится непосредственно, а именно:

$$D = \left(\begin{array}{cccc|c} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} & c_1 \\ 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & d_{mn} & c_n \end{array}\right)$$

Последняя строка матрицы соответствует уравнению $d_{mn}x_n=c_n$. Откуда находят x_n.

Далее из предпоследней строки выписываем уравнение, в которое подставляем найденное решение x_n и находим x_{n-1}. Таким образом, находится вся совокупность n значений неизвестных.

§4 Исследования решений системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Рассмотрим систему *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

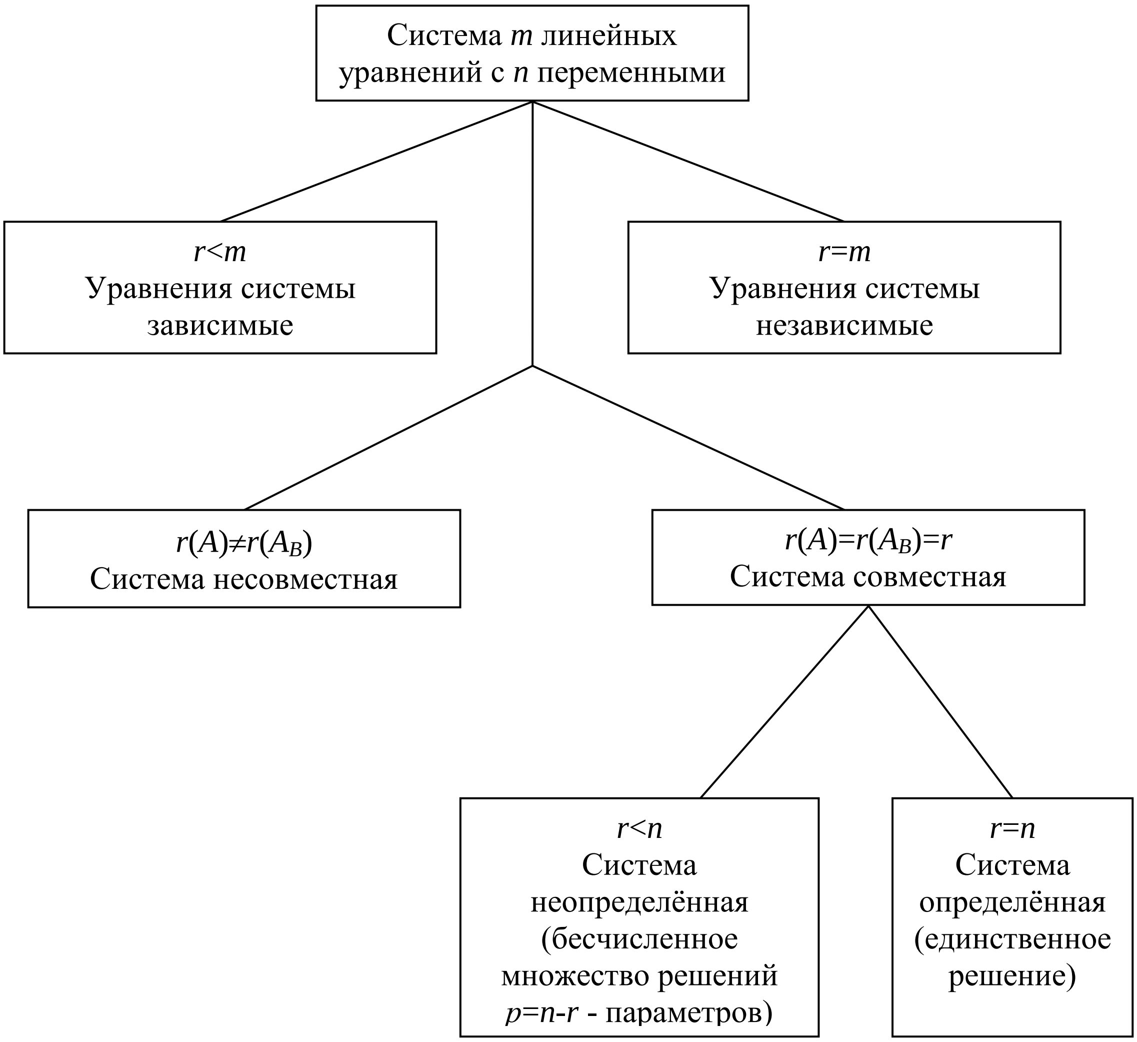
Ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых строк. Поэтому, если строки расширенной матрицы A_B (т.е. уравнения системы), линейно независимы, то ранг матрицы A_B равен числу её уравнений, т.е. $r=m$, если линейно зависимы, то $r<m$.

Теорема (***Кронекера-Капелли, критерий совместности системы***). Система линейных уравнений совместна тогда, только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

1) Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е. $r=n$, то система имеет единственное решение.

2) Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т.е. $r<n$, то система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.



Пусть $r<n$, r переменных x_1, x_2, ... , x_r называются *основными* (или базисными), если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. базисный минор) отличен от нуля. Остальные n-r называются *неосновными* (или свободными).

Решение системы, в котором все n-r неосновных переменных равны нулю, называется *базисным*.

§5 Системы линейных однородных уравнений.

Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна ($r(A)=r(A_B)$), она имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Теорема: Для того, чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r её основной матрицы был меньше числа неизвестных, т.е. $r<n$.

Теорема: Для того, чтобы система n однородных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы её определитель Δ был равен нулю.