Лекция 3

Обратная матрица;

Ранг матрицы;

Основные понятия о системах линейных уравнений.

§1 Обратная матрица.

<u>Определение 1:</u> *Матрица A^{-1} называется* ***обратной по отношению к квадратной матрице*** *A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:*

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Для существования матрицы A^{-1} необходимым и достаточным условием является требование $|A|\neq 0$.

<u>Определение 2:</u> Если определитель матрицы отличен от нуля ($|A|\neq 0$), то такая квадратная матрица называется *невырожденной,* или *неособенной;* в противном случае (при $|A|=0$) — *вырожденной,* или *особенной*.

Теорема (необходимое и достаточное условие, существования обратной матрицы). *Обратная матрица A^{-1} существует* (*и единственна*) *тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.*

Ищем A^{-1} – обратную матрицу для A (если она существует) по формуле:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства:

1. $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$;
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$;
3. $\left(A^{m}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{m}$;

4. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

5. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$; $\alpha \neq 0$.

§2 Ранг матрицы.

<u>Определение 1:</u> В матрице A размера $m\times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы *k-го* порядка, где $k\leq\min(m;\ n)$. Определители таких подматриц называются *минорами k-го порядка матрицы A*.

<u>Определение 2:</u> ***Рангом*** *матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы*. Ранг матрицы A обозначается $rangA$, или $r(A)$.

Из определения следует:

1) *ранг матрицы* $A_{m,n}$ *не превосходит меньшего из её размеров, т.е.* $r(A)\leq\min(m;\ n)$;
2) $r(A)=0$ *тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е.* $A=0$;
3) *для квадратной матрицы n-го порядка* $r(A)=n$ *тогда и только тогда, когда матрица A — невырожденная*.

Назовем ***элементарными преобразованиями*** матрицы следующие:

1) Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
2) Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.
3) Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

Замечание: отбрасывание нулевой строки (столбца) и транспонирование матрицы к элементарным преобразованиям матрицы не относится.

Теорема. *Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы, а также при её транспонировании и отбрасывании нулевой строки или столбца.*

<u>Определение 3:</u> Две матрицы называются эквивалентными, если одна получается из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований. Эквивалентные матрицы имеют одинаковые ранги.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к «ступенчатому виду», когда вычисление её ранга не представляет труда.

<u>Определение 4:</u> Матрица A называется *ступенчатой,* если она имеет вид:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad a_{ii}\neq 0; \quad i=\overline{1,r}; \quad r\le k.$$

Замечание. Условие $r\le k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор r-го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\dots a_{rr}\neq 0$$

Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-2)\times(-3) \\ \hookleftarrow \quad\quad \hookleftarrow \\ \\ \hookleftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=3$$

<u>Определение 5:</u> Строка e_m называется ***линейной комбинацией*** *строк* e_1, e_2, …, e_{m-1}, *матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа.*

$e_m=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\dots+\lambda_{m-1} e_{m-1}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots\lambda_{m-1}$ *- любые числа.*

<u>Определение 6:</u> *Строки матрицы* e_1, e_2, …, e_m, *называются* ***линейно зависимыми****, если существуют такие числа* λ_1, λ_2, …λ_m, *не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:*

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\dots+\lambda_m e_m=0.$$

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Теорема о ранге матрицы *Ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные её строки (столбцы).*

§3 Основные понятия о системах линейных уравнений.

Определение 1: Система m линейных уравнений с n неизвестными (переменными) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь a_{ij} и b_i - произвольные числа (i=1,2, ..., m; j=1,2, ..., n), которые называются соответственно *коэффициентами при неизвестных* и *свободными членами* системы уравнений. Первый индекс у коэффициентов при неизвестных означает номер уравнения, второй индекс соответствует номеру неизвестного x_i.

Определение 2: Решением системы уравнений называется набор n чисел $x_1=a_1,\ x_2=a_2,\ \ldots,\ x_n=a_n$, при подстановке которых в эту систему каждое уравнение данной системы превращается в тождество.

Определение 3: Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение; если система не имеет решений, то она называется *несовместной*.

Определение 4: Совместная система уравнений имеет либо одно решение, и в таком случае она называется *определённой*, либо, если у неё больше одного решения, она называется *неопределенной*. В последнем случае каждое её решение называется *частным решением системы*. Совокупность всех частных решений называется *общим решением системы*.

Определение 5: Системы уравнений называются *эквивалентными (равносильными)*, если они имеют одно и то же множество решений (или, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот).

Элементарные преобразования исходной системы приводят к эквивалентной системе. К ***элементарным преобразованиям системы*** относятся:

1 вычеркивание уравнения $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=0$ – нулевой строки;
2 перестановка уравнений или слагаемых $a_{ij}x_j$ в уравнениях;
3 прибавление к обеим частям одного уравнения соответственно обеих частей другого уравнения этой системы, умноженного на любое действительное число;
4 удаление уравнений, являющихся линейными комбинациями других уравнений системы.

Последнее свойство вытекает из третьего свойства: если какое-либо уравнение представляет собой линейную комбинацию других уравнений, то из него можно сформировать нулевую строку.