Лекция 2

Определители квадратных матриц;
Миноры и алгебраические дополнения;
Свойства определителей.

§1 Определители квадратных матриц.

Определитель — число, характеризующее квадратную матрицу A, обозначается $|A|$ или $detA$ или Δ.

Определение 1: *Определителем матрицы первого порядка* $A=(a)$, или *определителем первого порядка,* называется элемент a:

$$\Delta=|A|=|a|=a.$$

Например: $|2|=2$, $|-4|=-4$.

Определение 2: *Определителем матрицы второго порядка* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, или *определителем второго порядка,* называется число, которое определяется по формуле:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Например: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=8-3=5$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-8-3=-11$.

Определение 3: *Определителем матрицы третьего порядка* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, или *определителем третьего порядка,* называется число, которое определяется по формуле:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

Для вычисления определителя третьего порядка пользуются правилами ***треугольника*** и ***параллелограмма***.

Правило треугольника:

Правило параллелограмма:

									1 строка
									2 строка
									3 строка
									1 строка
									2 строка

Например: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix}=40+21-84=-23$,

Определение 4: *Минором* M_{ij} *элемента* a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и *j-го* столбца.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 4 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 7 \cdot 5 = -19 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 7 \cdot 6 = -34 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 8 \cdot 6 = -28$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} =$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1)-го порядка.

<u>Определение 5:</u> *Алгебраическим дополнением* A_{ij} *элемента* a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 4 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -19 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 34 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -28$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = - \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = - \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} =$$

<u>Теорема Лапласа:</u> *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения*:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$ - разложение по элементам i-й строки;

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$ - разложение по элементам j-го столбца.

<u>Вычислите определитель:</u>

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

Вычислим определитель четвёртого порядка путём его разложения по элементам, например, первого столбца, для чего методом Гаусса приведём его к следующему виду:

$$\begin{vmatrix}3&5&7&2\\1&2&3&4\\-2&-3&3&2\\1&3&5&4\end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \times 2\\ \hookleftarrow \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} \\ \times(-1) \\ \\ \hookleftarrow\end{vmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\ \times(-3)\\ \\ \\ \end{matrix}\Bigg| \Leftrightarrow \left\|\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}-1&-2&-10\\2&3&4\\1&9&10\\1&2&0\end{matrix}\right| = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&-2&-10\\1&9&10\\1&2&0\end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix}-1&-2&-10\\1&9&10\\1&2&0\end{vmatrix} = 10\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\1&9&1\\1&2&0\end{vmatrix} = -70$$

Где определитель третьего порядка вычислен по формуле:

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\1&9&1\\1&2&0\end{vmatrix} = 1\cdot 9\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 9\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot 1 = -7$$

Итак, получили:

$$\begin{vmatrix}3&5&7&2\\1&2&3&4\\-2&-3&3&2\\1&3&5&4\end{vmatrix} = -70$$

<u>Определение 6:</u> Квадратная матрица называется *треугольной,* если все её элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

Определитель треугольной (*и, очевидно, диагональной*) *матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

§2 Свойства определителей.

1. *Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то её определитель равен 0.*

2. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число X, то её определитель умножится на это число X.*

Замечание. За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех элементов.

3. *При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется:* $|A'|=|A|$.

4. *При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.*

5. *Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен 0.*

6. *Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.*

7. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна 0.*

8. *Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.*

9. *Сумма произведений произвольных чисел* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа* $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Свойство вытекает непосредственно из теоремы Лапласа.

10. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:* $|C|=|A|\cdot|B|$, где $C=A\cdot B$; A и B — матрицы n-го порядка.

Замечание. Из свойства 10 следует, что даже если $AB\neq BA$, то $|AB|=|BA|$.