Лекция 1

Основные понятия о матрицах;
Действия над матрицами;
Свойства операций над матрицами;

Линейная алгебра

§1 Основные понятия о матрицах.

Определение 1: *Матрицей* размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, *A, B, C,...,* а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i — номер строки, j — номер столбца.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A_{m\times n}=(a_{ij}); \quad i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,n}.$$

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11}=1; & a_{12}=-2; \\ a_{21}=3; & a_{22}=0; \\ a_{31}=-4; & a_{32}=5; \end{matrix}$$

Определение 2: Две матрицы *A и B* одного размера называются *равными,* если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$, для любых $i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,n}.$

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \neq B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq B_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 3: Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой* (*вектором-строкой*), а из одного столбца — *матрицей-столбцом* (*вектором-столбцом*).

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец;

$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$ – матрица-строка;

<u>Определение 4:</u> Матрица называется *квадратной* n-го порядка, если число её строк равно числу столбцов и равно n (в противном случае матрица называется *прямоугольной* размера $m\times n$).

$A = (5)$ – квадратная матрица первого порядка;

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – квадратная матрица второго порядка;

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -2 & 7 & 4 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$ – квадратная матрица третьего порядка;

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$ – прямоугольная матрица размера 3×2;

<u>Определение 5:</u> Элементы матрицы a_{tj}, у которых номер столбца равен номеру строки (i=j), называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11,}$ $a_{22, \ \dots,}$ a_{nn}. Квадратная матрица имеет две диагонали: главную и побочную.

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 5 & 2 \\ -2 & \underline{-1} & 4 & -5 \\ -3 & 1 & \underline{3} & 7 \\ 9 & -9 & -2 & \underline{4} \end{pmatrix}$$

главную диагональ образуют элементы: 1; -1; 3; 4;

побочную диагональ образуют элементы: 2; 4; 1; 9.

<u>Определение 6:</u> Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной.*

$$A=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix};\qquad D=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix};$$

$$E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix};\qquad F=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix};\qquad G=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\\0&2\\0&0\end{pmatrix}.$$

диагональные матрицы:

<u>Определение 7:</u> Квадратная матрица называется *треугольной*, если все её элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&9\\0&7&4\\0&0&6\end{pmatrix}$$ – верхняя треугольная матрица;

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&7&0\\7&-1&6\end{pmatrix}$$ – нижняя треугольная матрица;

<u>Определение 8:</u> Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны между собой, то матрица называется *скалярной* матрицей; а если они равны единице, то матрица называется *единичной* матрицей n-го порядка – E.

<u>Определение 9:</u> Матрица любого размера называется *нулевой,* или *нуль-матрицей,* если все её элементы равны нулю – O.

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(5)_{1\times1}=5$.

§2 Действия над матрицами.

<u>Умножение матрицы на число:</u> *Произведением матрицы A на число λ* называется матрица $B=A\lambda$, элементы которой $b_{ij}=a_{ij}\lambda$, для $i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}$.

Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Операции сложения и вычитания матриц выполняются только для матриц одинаковых размеров (порядков):

<u>Сложение матриц:</u> *Суммой двух матриц A и B* одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, для $i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}.$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

<u>Вычитание матриц:</u> *Разность двух матриц* одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A-B=A+(-1)\cdot B$.

Операция умножения выполняется только для матриц, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй:

<u>Умножение матриц:</u> *Произведением матриц* $A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}$ называется такая матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij}, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Свойства операций над матрицами:

- $A+B=B+A$;
- $(A+B)+C=A+(B+C)$;
- $A+O=A$;
- $A-A=O$;
- $1\cdot A=A$;
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
- $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
- $A(B+C)=AB+AC$;
- $(A+B)C=AC+BC$;
- $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$;
- $(AB)C=A(BC)$;
- Если произведение матриц AB существует, то после перестановки сомножителей местами произведения матриц BA может и не существовать.
- Если даже произведения AB или BA существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.
- В случае, когда оба произведения AB и BA существуют и оба — матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц A и B одного порядка), *коммутативный (переместительный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется,* т.е. $AB\neq BA$.
- В частном случае коммутативным законом обладают: произведение любой квадратной матрицы A n-го порядка на единичную матрицу E того же порядка, причём это произведение равно A: $AE=EA=A$ или произведение

любой квадратной матрицы A n-го порядка на обратную к ней матрицу A^{-1} того же порядка, причём это произведение равно E: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

- Произведение двух ненулевых матриц может равняться нулевой матрице, т.е. из того, что $AB=0$, не следует, что $A=0$, или $B=0$.

<u>Транспонирование матрицы:</u> переход от матрицы A к матрице A' ($A^{т}$), в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' ($A^{т}$) называется *транспонированной* относительно матрицы A.

- $(A^{т})^{т}=A$;
- $(\alpha A)^{т}=\alpha A^{т}$;
- $(A+B)^{т}=A^{т}+B^{т}$;
- $(A\cdot B)^{т}=B^{т}\cdot A^{т}$;

<u>Деление матриц:</u> *Деление матрицы A на матрицу B* определяется следующим образом через умножение: $A:B=A\cdot B^{-1}$, где B^{-1} – обратная матрица для B .

Итак, деление матрицы A на матрицу B возможно при соблюдении вообще говоря двух условий:

1) матрица B^{-1} – обратная матрица для B должна существовать (B – невырожденная, квадратная n-го порядка);

2) число столбцов матрицы A равно n.